DIFFERENZIERBARE FUNKTIONEN UND FALTUNGSHEMIGRUPPEN AUF EINER LOKALKOMPAKTEN GRUPPE

Dissertation

der

Mathematischen Fakultät

der Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

zur Erlangung des Grades

eines Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von

EIKE BORN

aus Celle

1986

DIFFERENZIERBARE FUNKTIONEN UND FALTUNGSHEMIGRUPPEN AUF EINER LOKALKOMPAKTEN GRUPPE

Dissertation

der

Mathematischen Fakultät

der Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

zur Erlangung des Grades

eines Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von

EIKE BORN

aus Celle

1986

Tag der mündlichen Prüfung:	9. Februar 1987
Dekan:	Professor Dr. Herbert Heyer
1. Berichterstatter:	Professor Dr. Eberhard Siebert
2. Berichterstatter:	Professor Dr. Herbert Heyer

I N H A L T

		Seite
Einleitung		1
Bezeichnungen		6
I	Differenzierbare Funktionen auf einer lokalkompakten Gruppe	10
§ 1	Die Lie-Algebra einer lokalkompakten Gruppe	10
§ 2	Die projektive Basis der Lie-Algebra	18
§ 3	Gleichmäßige Differenzierbarkeit	31
§ 4	Räume differenzierbarer Funktionen	40
§ 5	Beispiele für kompakte abelsche Gruppen	56
II	Hemigruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen	61
§ 6	Faltungshemigruppen und Faltungshalbgruppen	61
§ 7	Eine konkrete Lévy-Hincin-Formel für Faltungshalbgruppen	68
§ 8	Charakterisierung der Faltungshemigruppen von beschränkter Variation	86
§ 9	Die Erzeugung von Faltungshemigruppen	97
§ 10	Störung von Faltungshemigruppen	115
Literatur		125

Einleitung

Eine Familie $(\mu(s,t))_{0\leq s\leq t}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einer lokalkompakten topologischen Gruppe heißt Faltungshemigruppe, wenn $\mu(s,s)$ das Dirac-Maß im Neutralelement von G ist und $\mu(r,t) = \mu(s,t) * \mu(r,s)$ für alle $r,s,t \in \mathbb{R}_+$ mit $0 \leq r \leq s \leq t$ gilt. Sie heißt stetig, wenn die Abbildung $(s,t) \to \mu(s,t)$ stetig bezüglich der schwachen Topologie auf dem Raum der beschränkten Maße ist.

Stetige Faltungshemigruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen treten zum einen als Übergangswahrscheinlichkeiten stochastisch stetiger Prozesse auf, die Werte in einer polnischen Gruppe annehmen und unabhängige Zuwächse besitzen. Zum anderen erscheinen sie im Rahmen des zentralen Grenzwertproblems. Unter geeigneten Bedingungen konvergiert die Folge der Produkte $\mu_n := \mu_{n1} * \ldots * \mu_{nk_n}$ eines infinitesimalen Dreiecks-systems von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mu_{nk})_{k=1,\ldots,k_n, n\in\mathbb{N}}$ auf einer lokalkompakten Gruppe gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß, daß zu einer Faltungshemigruppe gehört. Im Fall von stationären Prozessen mit unabhängigen Zuwächsen bzw. (reihenweise) kommutativen Dreieckssystemen von Wahrscheinlichkeitsmaßen treten in entsprechender Weise Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf.

Die Untersuchung von Faltungshalbgruppen auf lokalkompakten Gruppen ist heute sehr weit fortgeschritten. Entscheidend war der Beweis der Lévy-Hinčin-Formel des infinitesimalen Generators für den Fall einer Lie-Gruppe durch HUNT [15].

Für das erzeugende Funktional einer Faltungshalbgruppe auf einer beliebigen lokalkompakten Gruppe konnte Anfang der siebziger Jahre eine Lévy-Hinčin-Darstellung angegeben werden (vgl. [13]). Ergebnisse aus der Funktionalanalysis, insbesondere der Hille-Yosida-Theorie, fanden dabei Anwendung.

Demgegenüber sind wenige Resultate über die Charakterisierung und Erzeugung von Faltungshemigruppen durch Familien erzeugender Funktionale bekannt. Das gleiche gilt für nicht notwendig stationäre Operatorhalbgruppen. HEROD und McKELVEY [11] entwickelten eine Hille-Yosida-Theorie für Evolutionsfamilien auf Banachraum-Ketten. FEINSILVER [8] und SIEBERT [19] untersuchten Faltungshemigruppen auf Lie-Gruppen. Während FEINSILVER dazu Methoden der Martingaltheorie benutzt, basieren die Ergebnisse von SIEBERT auf einer genauen Analyse von (nicht notwendig kommutativen) infinitesimalen Dreieckssystemen von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Darüberhinaus diskutiert der Autor die Eigenschaften differenzierbarer Funktionen auf einer Lie-Gruppe. Die dabei erzielten Resultate bildeten einen Ausgangspunkt für die hier durchgeführte Untersuchung von Faltungshemigruppen auf einer beliebigen lokalkompakten Gruppe.

In der vorliegenden Arbeit werden für eine lokalkompakte Gruppe G die projektive Basis ihrer Lie-Algebra und Räume differenzierbarer Funktionen auf G eingeführt. Darauf aufbauend gelingt zum einen die Erzeugung und Charakterisierung von Klassen von Faltungshemigruppen durch Generatorfamilien.

Zum anderen kann eine konkrete Darstellung des infinitesimalen Generators einer Faltungshalbgruppe auf einer lokalkompakten Gruppe angegeben werden.

Die Arbeit ist in zwei Kapitel aufgeteilt. Das erste Kapitel ist dem Studium der differenzierbaren Funktionen auf einer lokalkompakten Gruppe G gewidmet. Es beginnt mit einer Untersuchung der topologischen Struktur der Lie-Algebra $\mathcal{L}(G)$ von G. Im Mittelpunkt steht hierbei der Begriff einer projektiven Basis von $\mathcal{L}(G)$ sowie der Nachweis ihrer Existenz in Paragraph 2. Nach der Definition der gleichmäßigen Differenzierbarkeit gelangen wir in Paragraph 4 zum zentralen Thema des Kapitels, den Räumen differenzierbarer Funktionen auf G. Es werden die Banachräume $C_k(G)$ der bezüglich einer projektiven Basis von $\mathcal{L}(G)$ (rechts- bzw. linksseitig) k-mal gleichmäßig differenzierbaren Funktionen eingeführt und untersucht. Für die Anwendung besonders interessant sind die nach BRUHAT [4] eingeführten (dichten) Teilräume $C^k(G)$ und $\mathcal{D}(G)$ der C^k-Funktionen und der Testfunktionen. Eine Erläuterung der vorgestellten Begriffe anhand zweier kompakter abelscher Gruppen schließt das erste Kapitel ab.

Im zweiten Kapitel wird nun die Untersuchung stetiger Faltungshemigruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen aufgenommen. Zuerst gehen wir auf den stationären Fall ein, also die Theorie der Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Wir beweisen in Paragraph 7 ein vollständiges Analogon des Satzes von Hunt für lokalkompakte Gruppen. Ein linearer

Operator N auf $C_o(G)$ ist Generator einer Faltungshalbgruppe auf G genau dann, wenn er wenigstens auf $\overrightarrow{C}^2(G)$ definiert ist, und wenn

$$Nf = \sum_{i\in I} a_i \vec{X}_i f + \sum_{i,j\in I} \alpha_{ij} \vec{X}_i \vec{X}_j f$$

$$+ \int_{G\setminus\{e\}} \{R_y f - f - \sum_{i\in I} k_i(y) \vec{X}_i f\}\, \eta(dy)$$

für alle $f \in \overrightarrow{C}^2(G)$ gilt. Dabei sind $(X_i)_{i\in I}$ eine projektive Basis von $\mathcal{L}(G)$, $(k_i)_{i\in I}$ ein schwaches Koordinatensystem von G bzgl. $(X_i)_{i\in I}$, a ist aus $\mathbb{R}^I$, η ein Lévy-Maß auf G und α eine positiv semidefinite symmetrische reelle IxI-Matrix. Dabei ergibt sich zugleich ein neuer Beweis der Existenz einer Lévy-Abbildung für G.

In den darauf folgenden Paragraphen werden nun beliebige Hemigruppen betrachtet. Die Anwendung einer von HEROLD und McKELVEY [11] entwickelten Hille-Yosida-Theorie führt zu einer Charakterisierung der Faltungshemigruppen von beschränkter Variation auf $\overleftarrow{C}_2(G)$. Einer solchen Hemigruppe $(\mu(s,t))_{o\le s\le t}$ bzw. der Familie $(T_{\mu(s,t)})_{o\le s\le t}$ der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsoperatoren wird in eindeutiger Weise eine zweiparametrige Generatorfamilie $(M(s,t))_{o\le s\le t}$ durch die operatorwertige integrierte Kolmogoroffsche Vorwärtsdifferentialgleichung $T_{\mu(s,t)} - Id = \int_s^t M(du) T_{\mu(s,u)}$ auf $\overleftarrow{C}_2(G)$ zugeordnet. Die entsprechende Rückwärtsdifferentialgleichung $T_{\mu(s,t)} - Id = \int_s^t T_{\mu(u,t)} M(du)$ ist ebenfalls auf $\overleftarrow{C}_2(G)$ erfüllt.

Ergebnisse von HEYER [14] gestatten in Paragraph 9 die Erzeugung von (im starken Sinn differenzierbaren) Hemigruppen.

Zu einer vorgegebenen (stetigen) Generatorfamilie $(N(t))_{t\geq 0}$ wird eine Faltungshemigruppe $(\mu(s,t))_{0\leq s\leq t}$ konstruiert, so daß die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsoperatoren für $0 \leq s \leq t$ die integrierten Kolmogoroffschen Differentialgleichungen

$T_{\mu(s,t)}f - f = \int_s^t N(u)T_{\mu(s,u)}f\,du$ sowie

$T_{\mu(s,t)}f - f = \int_s^t T_{\mu(u,t)}N(u)f\,du$

für $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$ erfüllen. $(\mu(s,t))_{0\leq s\leq t}$ ist durch jede dieser Gleichungen eindeutig festgelegt. In Paragraph 10 wird ein Ergebnis aus der Störungstheorie von Faltungshemigruppen vorgestellt. Besitzt ein stochastisch stetiger Prozeß unabhängige Zuwächse, so gilt dies auch nach Störung durch einen zusammengesetzten Poisson-Prozeß. Eine analoge Aussage gilt für die Generatoren. Wir verallgemeinern hier ein von HANTSCH und v. WALDENFELS [9] angegebenes Beispiel eines additiven Prozesses.

Die Anregung zu dieser Arbeit kam von meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. E. Siebert. Durch zahlreiche Diskussionen half er darüberhinaus wesentlich bei ihrer Entstehung. An dieser Stelle möchte ich ihm dafür herzlich danken.

Bezeichnungen

Wir bezeichnen wie üblich mit $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ die komplexen, die reellen, die rationalen, die ganzen und die positiven ganzen Zahlen. $\mathbb{T}$ ist der Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$. Eine Abbildung f von $D := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq s \leq t\}$ in eine Algebra A heißt additiv, falls $f(r,t) = f(r,s) + f(s,t)$ und multiplikativ, falls $f(r,t) = f(s,t) \cdot f(r,s)$ für alle $(r,s),(s,t) \in D$ gilt.

Sei I nun eine nichtleere Menge. Für $i,j \in I$ sei δ_{ij} das Kronecker-Symbol. Das System $\mathfrak{F}(I)$ der endlichen Teilmengen von I ist durch die Inklusion geordnet. Ist I speziell ein Intervall $[s,t]$ von $\mathbb{R}$, so wird die Filterbasis der endlichen Unterteilungen von I mit $\mathfrak{Z}(s,t)$ bezeichnet und die Ordnung im Sinne der Feinheit $|Z| := \max_{z_j \in Z} |z_{j+1} - z_j|$ von $Z \in \mathfrak{Z}(s,t)$ verstanden. Ein System $\mathcal{E}$ von Teilmengen von I heißt absteigend (aufsteigend) filtrierend, wenn es für alle $E, E' \in \mathcal{E}$ ein $F \in \mathcal{E}$ gibt mit $F \subseteq E \cap E'$ ($F \supseteq E \cup E'$). Ist H eine Teilmenge von I, so bezeichnen $\complement H$ das Komplement von H in I und 1_H die Indikatorfunktion zu H. Ist ferner f eine auf I definierte Abbildung, so steht $\mathrm{Res}(H,f)$ für die auf H eingeschränkte Abbildung. Für eine Familie $(f_z)_{z \in Z}$ reellwertiger Funktionen soll $f = \bigoplus_{z \in Z} f_z$ genau dann gelten, wenn die Familie der Definitionsbereiche D_z der Funktionen f_z ($z \in Z$) eine Partition von I bildet, $\mathrm{Res}(D_z,f) = f_z$ für $z \in Z$ gilt und nur endlich viele f_z nicht identisch 0 sind. In diesem Sinn wird hier auch die direkte Summe von Funktionenräumen verstanden.

Insbesondere wird für eine auf einer Teilmenge von I definierte reellwertige Funktion f die triviale Fortsetzung von f auf I mit f ● 0 bezeichnet.

Ein meßbarer Raum ist ein Tupel $(\Omega, \mathcal{A})$, bestehend aus einer nichtleeren Menge Ω und einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Ist auf $\mathcal{A}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß W definiert, so heißt $(\Omega, \mathcal{A}, W)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für eine meßbare Abbildung T eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{A}, W)$ in einen meßbaren Raum $(\Sigma, \mathcal{S})$ ist T(W) das Bildmaß von W unter T. Ist $A \in \mathcal{S}$, so steht $|T \in A|$ für die Menge $\{\omega \in \Omega : T(\omega) \in A\}$. Ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{A}, W)$ mit Werten in $(\Sigma, \mathcal{S})$ ist eine Familie $(\Psi_t)_{t \geq 0}$ meßbarer Abbildungen von $(\Omega, \mathcal{A})$ in $(\Sigma, \mathcal{S})$.

Sei nun E ein topologischer Raum. E heißt (lokal-) kompakt, wenn die Topologie von E (lokal-) kompakt ist und dem Hausdorffschen Trennungsaxiom genügt. E heißt polnisch, wenn die Topologie von E eine abzählbare Basis besitzt und E vollständig metrisierbar ist. Für eine Teilmenge H von E sind $\bar{H}$ der topologische Abschluß und $\mathring{H}$ das Innere von H. Ist f eine reellwertige Funktion auf E, so definiert $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}$ den Träger von f. Der Raum der reellwertigen stetigen Funkionen auf E wird mit C(E) bezeichnet. $C_b(E)$, $C_o(E)$ bzw. $\mathcal{K}(E)$ sind die Teilräume der beschränkten stetigen Funktionen, der im Unendlichen verschwindenden stetigen Funktionen und der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf E. Es gilt $\mathcal{K}(E) \subseteq C_o(E) \subseteq C_b(E) \subseteq C(E)$. Diese Räume sind Vektorräume. $\|f\|_o := \sup_{x \in E} |f(x)|$ definiert eine Norm auf $C_b(E)$. Ein Grenzwert in der durch diese Norm

induzierten Topologie wird mit $\|\cdot\|_o$-lim bezeichnet. $C_o(E)$ ist in dieser Norm ein Banachraum. Unter einem Maß auf E wird stets ein Radonmaß auf E verstanden. Ein beschränktes Radonmaß wird mit einem regulären Borelmaß auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$ identifiziert ([13], 1.1). Mit $\mathcal{M}(E)$ werden die Radonmaße und mit $\mathcal{M}^1(E)$ die Wahrscheinlichkeitsmaße auf E bezeichnet. Für $x \in E$ sei ε_x das Dirac-Maß im Punkt x.

Sei nun G eine lokalkompakte Gruppe mit Neutralelement e. Mit G^o werden die Zusammenhangskomponente und mit $\mathcal{U}(G)$ das Umgebungssystem von e in G bezeichnet. Es sei $G^*:= G\setminus\{e\}$. Für eine reellwertige Abbildung f auf G und $y \in G$ sind f^*, $R_y f$ und $L_y f$ die durch $f^*(x):= f(x^{-1})$, $R_y f(x):= f(xy)$ sowie $L_y f(x):= f(yx)$ für alle $x \in G$ definierten Abbildungen. Ist G' eine weitere topologische Gruppe, so bezeichnet Hom(G,G') den mit der kompakt-offenen Topologie versehenen Raum der stetigen Homomorphismen von G nach G'. Falls auf G eine Ordnung "$\prec$" gegeben ist, so setzen wir $G_+:= \{x \in G: x \succ e\}$. Entsprechend ist für $V \subseteq \mathbb{R}^G$ stets $V_+ = \{f \in V: f \geq 0\}$. Mit ω wird ein linkes Haarmaß auf G bezeichnet. $L_1(\omega)$ ist die Menge der Äquivalenzklassen reeller meßbarer, bezüglich ω integrierbarer Funktionen auf G. Durch $\|f\|_{L_1} := \int |f| d\omega$ ist auf $L_1(\omega)$ eine Norm erklärt. Für jedes $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ heißt der durch $T_\mu(f)(x):= \int f(xy)\mu(dy)$ für $x \in G$ und $f \in C_b(G)$ definierte lineare Operator T_μ der Wahrscheinlichkeitsoperator zu μ. Wir definieren $\tilde{\mu}$ durch $\tilde{\mu}(A):= \mu(A^{-1})$ für alle $A \in \mathcal{B}(G)$.

Ist G eine reelle Lie-Gruppe, so bezeichnen $\mathcal{L}(G)$ die Lie-Algebra von G und $\exp_G: \mathcal{L}(G) \to G$ die Exponentialabbildung.

$\mathcal{D}(G)$ ist der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf G mit kompaktem Träger (vgl. [4]). Auch nulldimensionale, also insbesondere endliche und diskrete Gruppen werden als Lie-Gruppen aufgefaßt.

Schließlich werden einige Begriffe aus der Funktionalanalysis benötigt. Für zwei Banachräume $(E,\|\cdot\|_E)$ und $(F,\|\cdot\|_F)$ ist $L(E,F)$ der Raum der auf einem linearen Teilraum $D(T)$ von E definierten linearen Abbildungen (Operatoren) mit Werten in F. Gilt $D(T) = E$, so ist T stetig genau dann, wenn $\|T\|_{E,F} := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}$ endlich ist. $\|T\|_{E,F}$ definiert eine Norm auf dem Raum $\mathcal{L}(E,F)$ der stetigen Operatoren von E in F. Eine Kontraktion auf E ist ein Operator $T \in \mathcal{L}(E,E)$ mit $\|T\|_{E,E} \leq 1$. Mit 1 wird die Identität bezeichnet.

I Differenzierbare Funktionen auf einer lokalkompakten Gruppe

In Paragraph 1 werden die wichtigsten Ergebnisse über die Approximation lokalkompakter Gruppen durch Lie-Gruppen zusammengefaßt und die Lie-Algebra $\mathcal{L}(G)$ einer lokalkompakten Gruppe vorgestellt. Ihre topologische Struktur wird in Paragraph 2 untersucht. Wichtigstes Hilfsmittel ist dabei der Begriff der projektiven Basis von $\mathcal{L}(G)$. In Paragraph 3 wird die Diskussion der Differenzierbarkeit reellwertiger Funktionen auf G aufgenommen. Sie basiert zum einen auf der Isomorphie von $\mathcal{L}(G)$ und dem Raum $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ der Einparameter-Untergruppen von G. Dies führt zu der Definition der (Banach-) Räume $C_k(G)$ der bezüglich einer projektiven Basis von $\mathcal{L}(G)$ k-mal gleichmäßig differenzierbaren Funktionen. Zum anderen kann man die differenzierbaren Funktionen auf den approximierenden Lie-Gruppen auf G hochheben. So gelangt man zu den Räumen der C^k-Funktionen. Diesen beiden Funktionenklassen ist Paragraph 4 gewidmet. Eine Illustration der Begriffe für zwei kompakte abelsche Gruppen schließt das erste Kapitel ab.

§ 1 Die Lie-Algebra einer lokalkompakten Gruppe

Die Definition der Lie-Algebra einer lokalkompakten Gruppe geht auf LASHOF [17] zurück. Dabei spielt der Begriff des projektiven Limes eine entscheidende Rolle.

1.1 Definition: Es seien $(A, \prec)$ eine filtrierend geordnete Menge und $(G_a)_{a \in A}$ eine Familie topologischer Gruppen. Für alle $a,b \in A$ mit $a \prec b$ mögen offene Abbildungen f_a^b aus $\mathrm{Hom}(G_b, G_a)$ existieren, die die Gleichung $f_a^c = f_a^b \cdot f_b^c$ für alle $a,b,c \in A$ mit $a \prec b \prec c$ erfüllen. Dann heißt (A, G_a, f_a^b) ein projektives System (topologischer Gruppen). Die Untergruppe

$$\{(x_a)_{a \in A} \in \prod_{a \in A} G_a : \text{für } a,b \in A \text{ mit } a \prec b \text{ gilt } x_a = f_a^b(x_b)\}$$

des topologischen Produktes $\prod_{a \in A} G_a$ heißt der projektive Limes des Systems (A, G_a, f_a^b). Sie wird mit $\varprojlim_{a \in A} G_a$ bezeichnet.

1.2 Bemerkung: Sind alle Gruppen G_a T_o-Gruppen, so ist $\varprojlim_{a \in A} G_a$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\prod_{a \in A} G_a$ ([12], 6.14).

Der projektive Limes eines Systems (A, G_a, f_a^b) von Lie-Gruppen ist im allgemeinen nicht lokalkompakt. Für die Untersuchung lokalkompakter Gruppen wäre diese Definition der Lie-projektiven Gruppen daher unnötig allgemein (vgl. [3], 2.1.1).

1.3 Definition: Eine lokalkompakte Gruppe G heißt Lie-projektiv, falls es eine Familie $\mathcal{H}$ kompakter Normalteiler von G gibt, so daß für alle $H \in \mathcal{H}$ die Faktorgruppen G/H Lie-Gruppen sind, und so daß $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H = \{e\}$ gilt. Ist $\mathcal{H}$ zudem absteigend filtrierend, so heißt $\mathcal{H}$ Lie-System zu G.

Die zusätzliche Eigenschaft der absteigenden Filtrierung eines Lie-Systems bedeutet keine wesentliche Einschränkung: Sind für abgeschlossene Normalteiler H und K von G die Faktorgruppen G/H und G/K Lie-Gruppen, so ist auch $G/H \cap K$ eine Lie-Gruppe ([18], 4.7.1).

1.4 Bemerkung: Für jede Lie-projektive Gruppe G ist das System $\mathcal{Z}(G)$ derjenigen kompakten Normalteiler H von G, für die G/H eine Lie-Gruppe ist, ein Lie-System zu G.

1.5 Bezeichnungen: a) Für kompakte Normalteiler H und N einer lokalkompakten Gruppe G mit $N \subseteq H$ bezeichne $p_H^N: G/N \to G/H$ die kanonische Abbildung $xN \mapsto xH$ ($x \in G$). Statt $p_H^{\{e\}}$ werde p_H geschrieben.

b) Für eine Lie-projektive Gruppe G sei ein zugehöriges Lie-System $\mathcal{Z}$ immer mit einer Menge A indiziert, die gemäß der Inklusion in $\mathcal{Z}$ geordnet ist: Es gelte für $a,b \in A$ also $a < b$ genau dann, wenn $H_a \supseteq H_b$ gilt. Es werde p_a^b statt $p_{H_a}^{H_b}$ und p_a statt p_{H_a} sowie $\exp_a$ statt $\exp_{G_a}$ geschrieben, wir setzen $G_a := G/H_a$.

c) Ist K ein kompakter Normalteiler von G, so identifizieren wir jedes Teilsystem $\mathcal{Y}$ von $\mathcal{Z}(G/K)$ mit dem entsprechenden Teilsystem $p_K^{-1}(\mathcal{Y})$ von $\mathcal{Z}(G)$.

Ist G eine Lie-projektive Gruppe, so sind die kanonischen Abbildungen zwischen den Faktorgruppen G_a ($a \in A$) stetige offene Epimorphismen von Lie-Gruppen. Es gilt $G = \varprojlim_{a \in A} G_a$

bezüglich dem projektiven System (A,G_a,p_a^b). Also ist G isomorph zum projektiven Limes eines Systems von Lie-Gruppen. Die Isomorphie ist gegeben durch die Abbildung $x \mapsto (xH_a)_{a\in A}$ $(x \in G)$. Auch die Abbildungen p_a sind surjektiv, so daß wir $p_a = p_a^b \circ p_b$ für alle $a,b \in A$ mit $a \prec b$ haben.

Ist G der projektive Limes eines Systems (A,G_a,f_a^b) von Lie-Gruppen, so sind die Kerne der kanonischen Abbildungen $p_a: G \mapsto G_a$ abgeschlossene, aber in der Regel nicht kompakte Normalteiler von G $(a \in A)$. Sie bilden daher im allgemeinen kein Lie-System für G. Sie bilden auch kein System kleiner Untergruppen von G; für Lie-Systeme kompakter Normalteiler gilt dies auf Grund des folgenden bekannten Lemmas.

1.6 Lemma: Seien K eine kompakte Teilmenge eines topologischen Raumes E und $\mathcal{H}$ ein absteigend filtrierendes System kompakter Mengen in E mit $\bigcap_{H\in\mathcal{H}} H = K$.
Dann existiert für jede (offene) Umgebung U von K ein $H \in \mathcal{H}$ mit $H \subseteq U$.

Eine lokalkompakte Gruppe G ist genau dann eine Lie-Gruppe, wenn G keine kleinen Untergruppen besitzt, d. h., wenn es eine Umgebung von e in G gibt, die keine nichttrivialen Untergruppen enthält ([13], p. 11, [18], 3.0). Nach 1.6 enthält jedes Lie-System einer Lie-Gruppe daher die triviale Untergruppe {e}. Es folgt daraus auch die zweite hier zu erwähnende Eigenschaft von Lie-Systemen kompakter Normalteiler.

1.7 Proposition: Es seien G eine Lie-projektive Gruppe, $\mathcal{S}_K$ ein Teilsystem von $\mathcal{S}(G)$ und $\mathcal{S}_N$ ein absteigend filtrierendes System kompakter Normalteiler von G. Es gelte

$$K := \bigcap_{H \in \mathcal{S}_K} H \supseteq N := \bigcap_{H \in \mathcal{S}_N} H.$$

Dann existiert für jedes $H \in \mathcal{S}_K$ ein $H' \in \mathcal{S}_N$ mit $H' \subseteq H$.

Beweis: Wir nehmen an, es gelte $H' \cap H \neq H'$ für alle $H' \in \mathcal{S}_N$. Dann ist stets $H'/H' \cap H \cong H'H/H$ nichttriviale Untergruppe von von G/H. Nach 1.6 existiert für jedes $U \in \mathcal{U}(G)$ ein $H' \in \mathcal{S}_N$ mit $H' = H'N \subseteq UN \subseteq UK \subseteq UH$ und $H'H/H \subseteq UH/H \in \mathcal{U}(G/H)$ im Widerspruch dazu, daß G/H als Lie-Gruppe keine kleinen Untergruppen besitzt. □

Seien K und N zwei kompakte Normalteiler von G mit $K \supseteq N$. Auf Grund der Vereinbarung 1.5 c) verfeinert dann jedes Lie-System von G/N im Sinn von 1.7 jedes Lie-System von G/K. Insbesondere verfeinern sich je zwei Lie-Systeme einer Lie-projektiven Gruppe gegenseitig.

Entscheidend für das weitere Vorgehen sind folgende grundlegende Ergebnisse aus der Theorie der lokalkompakten topologischen Gruppen. Ist G eine lokalkompakte Gruppe mit kompakter Faktorgruppe G/G^o, so gibt es für jedes $U \in \mathcal{U}(G)$ einen kompakten Normalteiler H von G in U, so daß G/H Lie-Gruppe ist ([18], 4.6). Zum anderen besitzt jede lokalkompakte Gruppe G eine offene Untergruppe G_1, so daß G_1/G^o kompakt ist ([13], p. 12).

Diese Ergebnisse werden hier in der folgenden Form angewendet.

1.8 Bemerkung: Es sei G eine lokalkompakte Gruppe.

a) Ist G Lie-projektiv und metrisierbar, so gibt es ein Lie-System zu G in Gestalt einer gegen {e} absteigenden Folge von Normalteilern.

b) Ist G/G^o kompakt, so ist G Lie-projektiv. Somit ist $\hat{G}^o$ und daher jede zusammenhängende lokalkompakte Gruppe Lie-projektiv.

c) Es existiert stets eine offene Lie-projektive Untergruppe G_1 von G. Insbesondere gilt $G^o \subseteq G_1$.

Die Lie-Algebra einer Lie-projektiven Gruppe G wird gemäß [17] mit Hilfe der Zusammenhangskomponenten G_a^o der Lie-Gruppen G_a eingeführt. Die eingeschränkten kanonischen Abbildungen $\tilde{p}_a^b: G_b^o \to G_a^o$ $(a,b \in A,\ a \prec b)$ sind wieder stetige offene Epimorphismen. Wegen $\mathcal{L}(G_b^o) = \mathcal{L}(G_b)$ $(b \in A)$ induzieren sie stetige offene Epimorphismen $dp_a^b: \mathcal{L}(G_b) \to \mathcal{L}(G_a)$, für die ebenfalls $dp_a^c = dp_a^b \circ dp_b^c$ für alle a,b,c aus A mit $a \prec b \prec c$ gilt.

1.9 Definition: Seien G eine lokalkompakte Gruppe und G_1 eine Lie-projektive offene Untergruppe. $\mathcal{H} = \{H_a: a \in A\}$ sei ein Lie-System für G_1. Dann heißt der projektive Limes $\varprojlim_{a \in A} \mathcal{L}(G_a)$ des Systems $(A, \mathcal{L}(G_a), dp_a^b)$ von Lie-Algebren die Lie-Algebra von G. Sie wird mit $\mathcal{L}(G)$ bezeichnet.

$\mathcal{L}(G)$ ist eine abgeschlossene Lie-Unteralgebra des topologischen Produktes $\prod_{a\in A} \mathcal{L}(G_a)$, insbesondere ein reeller topologischer Vektorraum. Die Elemente von $\mathcal{L}(G)$ werden mit $(X^a)_{a\in A}$ bezeichnet. Auf Grund der Surjektivität der Abbildungen dp_a^b sind die Projektionen $dp_a: \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G_a)$ wieder stetige, offene Epimorphismen. Sie genügen den Relationen $dp_a = dp_a^b \circ dp_b$ für alle $a,b \in A$ mit $a \prec b$. Es existiert eine Exponential-Abbildung $\exp_G: \mathcal{L}(G) \to G$. Sie ist definiert durch $\exp_G((X^a)_{a\in A}) := (\exp_a X^a)_{a\in A}$ für alle $(X^a)_{a\in A}$ aus $\mathcal{L}(G)$; dabei ist G mit $\varprojlim_{a\in A} G_a$ zu identifizieren. Diese Abbildung ist stetig, aber im allgemeinen kein lokaler Homöomorphismus.

Vielfach wird es sich als günstig erweisen, die Lie-Algebra einer lokalkompakten Gruppe G als Raum der Einparameter-Untergruppen von G darzustellen. Auf Grund der Definition von $\exp_G$ ist die Abbildung $t \mapsto \exp_G tX$ ein Element von $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$. Man kann darüberhinaus zeigen, daß jedes Element aus $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ so dargestellt werden kann.

1.10 Bezeichnung: Für jedes $X \in \mathcal{L}(G)$ bezeichne in Zunkunft λ_X die durch $\lambda_X(t) := \exp_G tX$ für $t \in \mathbb{R}$ definierte Abbildung aus $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$. Für alle $x \in G$ und $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ sei λ^x die durch $\lambda^x(t) := x^{-1}\lambda(t)x$ definierte, bezüglich x zu λ konjugierte Einparameter-Untergruppe.

Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ und $s,t \in \mathbb{R}$ seien die Elemente $s\lambda$, $\lambda_1+\lambda_2$ und $[\lambda_1,\lambda_2]$ von $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ definiert durch

$(s\lambda)(t) := \lambda(st)$,

$(\lambda_1+\lambda_2)(t) := \lim_{k\to\infty}(\lambda_1(t/k)\lambda_2(t/k))^k$,

$[\lambda_1,\lambda_2](t^2) := \lim_{k\to\infty}(\lambda_1(-t/k)\lambda_2(-t/k)\lambda_1(t/k)\lambda_2(t/k))^k$ und

$[\lambda_1,\lambda_2](-t^2) := [\lambda_2,\lambda_1](t^2)$.

Mit diesen Operationen und der Topologie der kompakt-offenen Konvergenz versehen ist Hom(ℝ,G) eine topologische Lie-Algebra. Durch $X \mapsto \lambda_X$ ist ein topologischer Isomorphismus von $\mathcal{L}(G)$ auf Hom(ℝ,G) gegeben ([3], 2.1). Insbesondere ist daher $\mathcal{L}(G)$ unabhängig von der Wahl der Lie-projektiven Untergruppe G_1 in G und des Lie-Systems zu G_1. Mit Hilfe dieser Isomorphie können auch die Lie-Algebren von Faktorgruppen von G genauer beschrieben werden.

1.11 Proposition: Seien G eine lokalkompakte Gruppe und K ein abgeschlossener Normalteiler von G. Dann definiert $\lambda \mapsto p_K \circ \lambda$ einen stetigen offenen Lie-Algebren-Homomorphismus δp_K von Hom(ℝ,G) auf Hom(ℝ,G/K) mit dem Ideal Hom(ℝ,K) als Kern. Der zugehörige Epimorphismus $dp_K: \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G/K)$ besitzt als Kern das Ideal $\mathcal{L}(K)$ und stiftet durch $X+\mathcal{L}(K) \mapsto dp_K(X)$ einen topologischen Lie-Algebren-Isomorphismus von $\mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(K)$ auf $\mathcal{L}(G/K)$.

Beweis: Die Aussage folgt aus [3], 2.1.2.5 ff.; einen etwas ausführlicheren Beweis der Surjektivität von δp_K findet man in [18], 4.15. □

§ 2 Die projektive Basis einer Lie-Algebra

Nachdem die Lie-Algebra $\mathcal{L}(G)$ einer lokalkompakten Gruppe G vorgestellt worden ist, wird nun der zentrale Begriff einer projektiven Basis von $\mathcal{L}(G)$ bezüglich einem vorgegebenen Lie-System eingeführt.

2.1 Definition: Seien G eine lokalkompakte Gruppe und G_1 eine Lie-projektive offene Untergruppe in G mit Lie-System $\mathfrak{h} = \{H_a : a \in A\}$. Eine Familie $\mathfrak{X} = (X_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{L}(G) \setminus \{0\}$ heiße projektive Basis von $\mathcal{L}(G)$ (bezüglich $\mathfrak{h}$), falls für jedes $a \in A$ die von Null verschiedenen Elemente von $dp_a(\mathfrak{X})$ eine Basis des Vektorraumes $\mathcal{L}(G_a)$ bilden.
Für $a \in A$ bezeichne $I_a := \{i \in I : dp_a(X_i) \neq 0\}$.

Eine projektive Basis der Lie-Algebra $\mathcal{L}(G)$ ist also von der Wahl des Lie-Systems abhängig. Ist G selber Lie-Gruppe, so ist wegen 1.6 jede projektive Basis von $\mathcal{L}(G)$ eine Basis im üblichen Sinn.

2.2 Bemerkung: Jede projektive Basis $\mathfrak{X}$ einer Lie-Algebra $\mathcal{L}(G)$ bezüglich einem Lie-System $\mathfrak{h}$ ist eine linear unabhängige Familie in $\mathcal{L}(G)$.

Beweis: Für jedes $X \in \mathfrak{X}$ existiert ein $H \in \mathfrak{h}$ mit $dp_H(X) \neq 0$, denn andernfalls wäre $X = (dp_H(X))_{H \in \mathfrak{h}} = 0$. Da $\mathfrak{h}$ ein Lie-System ist, gibt es zu jeder endlichen Familie $\mathfrak{y}$ aus $\mathfrak{X}$ ein

$H \in \mathcal{H}$ mit $dp_H(X) \neq 0$ für alle $X \in \mathcal{Y}$. Also ist $dp_H(\mathcal{Y})$ Teil einer Basis von $\mathcal{L}(G/H)$ und daher linear unabhängig. Dies gilt dann auch für $\mathcal{Y}$. □

Bevor wir uns der Frage der Existenz einer projektiven Basis zuwenden, sollen ihre Eigenschaften und ihre Beziehung zur Lie-Algebra untersucht werden.

2.3 Proposition: Seien G eine lokalkompakte Gruppe und $\mathcal{X} = (X_i)_{i \in I}$ eine projektive Basis von $\mathcal{L}(G)$.

a) Für alle $a \in A$ ist I_a endlich.

b) Für alle $a, b \in A$ mit $a \prec b$ gilt $I_a \subseteq I_b$; für $i \in I_b$ ist $dp_a^b(X_i^b) \neq 0$ genau dann erfüllt, wenn $i \in I_a$ ist.

c) Es gilt $I = \bigcup_{a \in A} I_a$.

Beweis: Die erste Aussage ergibt sich direkt aus der Definition der projektiven Basis. b) folgt aus $dp_a = dp_a^b \circ dp_b$. Die Inklusion "$\supseteq$" von c) ist offensichtlich. $i \in I$ und $i \notin \bigcup_{a \in A} I_a$ würde $dp_a(X_i) = 0$ für alle $a \in A$, also $X_i = 0$, implizieren. □

Während also das zur projektiven Basis gehörende Lie-System absteigend filtrierend ist, ist das System der Index-Mengen $\{I_a : a \in A\}$ aufsteigend filtrierend.

Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe ist endlich-dimensional, sie trägt somit die Vektorraumtopologie eines euklidischen Raumes. Es wird nun gezeigt, daß für eine beliebige lokalkompakte Gruppe in dieser Aussage der euklidische Raum durch den Produktraum $\mathbb{R}^I$ ersetzt werden muß.

2.4 Proposition: Es seien K eine nichtleere Menge, $(Y_i)_{i\in K}$ aus $\mathcal{L}(G)^K$ und $(t_i)_{i\in K}$ aus $\mathbb{R}^K$. Für jedes $J\in\mathfrak{F}(K)$ und jedes $a\in A$ sei $Y_J^a := \sum_{j\in J} t_j Y_j^a$.

Dann ist $\sum_{j\in J} t_j Y_j := Y_J := (Y_J^a)_{a\in A}$ als Element von $\mathcal{L}(G)$ definiert. Folgende Aussagen sind gleichwertig:

(i) Für alle $a\in A$ existiert ein $Y^a\in\mathcal{L}(G_a)$ mit $Y^a = \lim_{J\in\mathfrak{F}(K)} Y_J^a$.

(ii) Es existiert ein $Y\in\mathcal{L}(G)$ mit $Y = \lim_{J\in\mathfrak{F}(K)} Y_J$.

(iii) Es existiert ein $\lambda\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ mit $\lambda = \lim_{J\in\mathfrak{F}(K)} \lambda_{Y_J}$.

Beweis: Die erste Aussage ergibt sich auf Grund der Homomorphie-Eigenschaften der Abbildungen dp_a^b $(a,b\in A,\ a\prec b)$. Für die erste Äquivalenz hat man dann nur noch zu beachten, daß $\mathcal{L}(G)$ abgeschlossener linearer Teilraum des topologischen Produktes $\prod_{a\in A}\mathcal{L}(G_a)$ ist. Die zweite Äquivalenz folgt aus der Isomorphie von $\mathcal{L}(G)$ und $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ nach § 1. □

2.5 Korollar: Es seien $\mathcal{X} = (X_i)_{i\in I}$ eine projektive Basis von $\mathcal{L}(G)$ und $t = (t_i)_{i\in I}\in\mathbb{R}^I$. Dann existiert genau ein $X\in\mathcal{L}(G)$ mit $\lim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in J} t_i X_i = X =: \sum_{i\in I} t_i X_i$.

Beweis: Für alle $J\in\mathfrak{F}(I)$ ist $X_J = \sum_{i\in J} t_i X_i$ wohldefiniert nach 2.4. Für $a\in A$ ist $\sum_{i\in I_a} t_i X_i^a$ aus $\mathcal{L}(G_a)$. Auf Grund der Definition einer projektiven Basis gilt

$$\sum_{i\in I_a} t_i X_i^a = \lim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in J\cap I_a} t_i dp_a(X_i)$$

$$= \lim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in J} t_i dp_a(X_i) = \lim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in J} t_i X_i^a.$$

Die Existenz eines Grenzwertes folgt nun aus 2.4 (ii). Da $\prod_{a\in A} \mathcal{L}(G_a)$ hausdorffsch ist, ist dieser eindeutig bestimmt. □

2.6 Satz: Es seien G eine lokalkompakte Gruppe und G_1 eine Lie-projektive offene Untergruppe von G mit Lie-System $\mathfrak{h} = \{H_a : a \in A\}$. Schließlich sei $\mathcal{X} = (X_i)_{i\in I}$ eine projektive Basis von $\mathcal{L}(G)$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Dann ist die Abbildung

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^I \to \mathcal{L}(G) \\ t \mapsto \sum_{i\in I} t_i X_i \end{cases}$$

ein topologischer Vektorraum-Isomorphismus. Die Mächtigkeit von I ist also nur von G abhängig.

Beweis: α) ϕ ist wohldefiniert nach 2.5 und offensichtlich ein Vektorraum-Homomorphismus. Gilt $\phi(t) = 0$, so hat man für $a \in A$ auch $0 = \lim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in J} t_i X_i^a = \sum_{i\in I_a} t_i X_i^a$, also $t_i = 0$ für alle $i \in I_a$. Aus 2.3 b) folgt $t_i = 0$ für alle $i \in I$. Also ist ϕ injektiv.

β) ϕ ist surjektiv.

Sei $X = (X^a)_{a\in A} \in \mathcal{L}(G)$. Nach 2.1 existiert für jedes $a \in A$ genau eine Familie $(t_i^a)_{i\in I_a}$ aus $\mathbb{R}$ mit $X^a = \sum_{i\in I_a} t_i^a X_i^a$.

Für jedes $i \in I$ wählen wir nun ein $a \in A$ mit $i \in I_a$ und setzen $t_i = t_i^a$. Dann ist $(t_i)_{i\in I}$ wohldefiniert. Für $i \in I_a \cap I_b$ mit $a,b \in A$ existiert nämlich nach 2.3 ein $c \in A$ mit $H_c \subseteq H_a \cap H_b$ und daher $I_c \supseteq I_a \cup I_b \supseteq I_a \cap I_b$. Nun gilt aber

$$\sum_{i\in I_b} t_i^b X_i^b = X^b = dp_b^c(X^c) = \sum_{i\in I_b} t_i^c dp_b^c(X_i^c) = \sum_{i\in I_b} t_i^c X_i^b$$

und nach 2.1 daher $t_i^b = t_i^c$ für alle $i \in I_b$. Analog gilt

$$\sum_{i \in I_a} t_i^a X_i^a = X^a = \sum_{i \in I_a} t_i^c X_i^a .$$

Somit hat man $t_i^a = t_i^b$ für $i \in I_a \cap I_b$.

Unmittelbar folgt $X = \sum_{i \in I} t_i X_i = \phi(t)$. ⌋

γ) Für $a \in A$ seien $pr_a : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^{I_a}$ die kanonische Abbildung und $\phi_a : \mathbb{R}^{I_a} \to \mathcal{L}(G_a)$ der topologische Vektorraum-Isomorphismus bezüglich der Basis $(dp_a(X_i))_{i \in I_a}$ von $\mathcal{L}(G_a)$. Dann kommutiert das nebenstehende Diagramm.

Bis auf die untersuchte Abbildung sind alle Abbildungen stetig und offen (vg. 1.11). Also ist ϕ ein topologischer Vektorraum-Isomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^I & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{L}(G) \\ \downarrow pr_a & & \downarrow dp_a \\ \mathbb{R}^I & \xrightarrow[\phi_a]{} & \mathcal{L}(G_a) \end{array} .$$

□

Obige Aussage ist für kompakte Gruppen auf anderem Wege kürzlich von EDAMATSU gezeigt worden ([7], 1.13).

Für die Richtigkeit der Aussage ist es notwendig, daß das Lie-System $\mathcal{L}$ absteigend filtrierend ist. Für $G = \mathbb{T}^2$ bilden $K_1 := \mathbb{T} \times \{1\}$ und $K_2 := \{1\} \times \mathbb{T}$ ein System kompakter Normalteiler mit trivialem Schnitt. Es gilt $\mathcal{L}(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{L}(G/K_i) = \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$. Die durch die kanonischen Abbildungen induzierten Differentiale dp_1 und dp_2 sind die Projektionen auf die erste und zweite Koordinate. Daher bilden $dp_1((1,1))$ und $dp_2((1,1))$ jeweils eine Basis von $\mathbb{R}$. Der Vektor $(1,1)$ bildet aber keine projektive Basis von $\mathcal{L}(\mathbb{T}^2)$.

Anhand dieses Beispiels sieht man auch, daß nicht zu jedem Lie-System einer Lie-projektiven Gruppe eine projektive Basis

existiert. Setzen wir $K_3 := \{(x,x^2): x \in \mathbb{T}\}$ und $K_4 := \{e\}$, so ist $\mathcal{K} = \{K_i: i = 1,\ldots,4\}$ ein Lie-System für G. Es gelten $\mathcal{L}(K_1) = \mathbb{R} \times \{0\}$ und $\mathcal{L}(K_2) = \{0\} \times \mathbb{R}$ sowie $\mathcal{L}(K_3) = \{(t,2t): t \in \mathbb{R}\}$. Auf Grund der folgenden Proposition kann es keine projektive Basis bezüglich $\mathcal{K}$ geben.

2.7 Proposition: Seien G eine Lie-projektive Gruppe, $\mathcal{K}$ ein Lie-System für G und $\mathcal{X}$ eine Familie aus $\mathcal{L}(G)\setminus\{0\}$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

(i) $\mathcal{X}$ ist eine projektive Basis von $\mathcal{L}(G)$ bezüglich $\mathcal{K}$.

(ii) Für alle $H \in \mathcal{K}$ ist $\mathcal{X} \setminus \mathcal{L}(H)$ Basis eines Vektorraum-Komplementes $\mathcal{L}(G)_H$ des Unterraumes $\mathcal{L}(H)$ in $\mathcal{L}(G)$.

Beweis: Für alle $H \in \mathcal{K}$ und jedes Vektorraum-Komplement W von $\mathcal{L}(H)$ in $\mathcal{L}(G)$ ist $\mathrm{Res}(W,dp_H): W \to \mathcal{L}(G/H)$ ein (Vektorraum-) Isomorphismus und $\mathcal{X} \cap \mathcal{L}(H)$ im Kern von dp_H (1.11). Insbesondere gilt dies für $\mathcal{L}(G)_H = \langle X_i: dp_H(X_i) \neq 0\rangle$. □

Jede Lie-projektive Untergruppe einer lokalkompakten Gruppe besitzt aber ein Lie-System, für welches eine projektive Basis der Lie-Algebra existiert. Der Beweis dieser Aussage wird mit Hilfe des Zornschen Lemmas geführt. Auf Grund der Definition von $\mathcal{L}(G)$ kann man sich auf die Betrachtung einer Lie-projektiven Gruppe beschränken.

Es seien also im folgenden G eine Lie-projektive Gruppe und $\mathcal{K}(G)$ das in 1.4 eingeführte Lie-System für G. Wir beginnen die transfinite Induktion mit der Definition der

Menge, auf die das Zornsche Lemma angewendet werden soll.

2.8 Definition: $\mathbb{K}$ sei die Menge der Paare $(K, \mathcal{X})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(K1) K ist ein kompakter Normalteiler von G.

(K2) $\mathcal{X}$ ist eine projektive Basis von $\mathcal{L}(G/K)$ bezüglich einem Lie-System $\mathcal{S}_K$ von G/K (beachte 1.5 c)).

Für $(K, \mathcal{X})$ und $(N, \mathcal{Y})$ aus $\mathbb{K}$ soll $(K, \mathcal{X}) \prec (N, \mathcal{Y})$ genau dann gelten, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(K3) Es gilt $N \subseteq K$.

(K4) $\mathcal{X}$ ist genau die Familie der von Null verschiedenen Elemente von $dp_K^N(\mathcal{Y})$, d. h., es existiert eine Teilmenge von $\mathcal{Y}$, die von dp_K^N bijektiv auf $\mathcal{X}$ abgebildet wird und deren Komplement bezüglich $\mathcal{Y}$ im Kern von dp_K^N liegt.

2.9 Proposition: $\mathbb{K}$ ist nichtleer und "$\prec$" definiert eine Ordnung auf $\mathbb{K}$.

Beweis: Die erste Aussage folgt aus der Lie-Projektivität von G. Für jedes $H \in \mathcal{S}(G)$ und jede Basis $\mathcal{X}$ von $\mathcal{L}(G/H)$ ist $(H, \mathcal{X})$ aus $\mathbb{K}$. Die Ordnungseigenschaften prüft man direkt nach. □

2.10 Lemma: $\mathbb{K}$ ist induktiv geordnet.

Beweis: Es sei $\{(K_b, \mathcal{X}_b): b \in B\}$ eine linear geordnete Teilmenge aus $\mathbb{K}$. Für $b \in B$ sei $\mathcal{S}_b$ das (bezüglich $\mathcal{X}_b$) nach

(K2) zu G/K_b gehörige Lie-System. Ohne Einschränkung können wir $K := \bigcap_{b \in B} K_b = \{e\}$ annehmen; andernfalls muß zu G/K übergegangen werden. Es möge B die durch $\mathfrak{K}$ induzierte Ordnung tragen. Wir haben daher $G = \varprojlim_{b \in B} G/K_b$.

α) Es gilt $\mathcal{L}(G) = \varprojlim_{b \in B} \mathcal{L}(G/K_b)$.

⌈Für alle $a,b \in B$ mit $a < b$ ist $\mathrm{Res}((G/K_b)^o, p_a^b)$ ein stetiger offener Epimorphismus der entsprechenden Zusammenhangskomponenten ([12], 5.18, 7.12). Nach [17], 3.12 und 2.2 existiert daher $\varprojlim_{b \in B} \mathcal{L}(G/K_b)$. Die Behauptung folgt auf Grund der Filtrationseigenschaft der Familie $(K_b)_{b \in B}$ aus [17], 2.6. ⌋

β) Für alle $b \in B$ und $X_b \in \mathfrak{X}_b$ existiert genau ein $X \in \mathcal{L}(G)$ mit $dp_b(X) = X_b$ und $dp_c(X) \in \mathfrak{X}_c$ für alle $c > b$.

⌈Für alle $c > b$ existiert nach (K4) genau ein $X_c \in \mathfrak{X}_c$ mit $dp_b^c(X_c) = X_b$. Für $a < b$ setzen wir $X_a := dp_a^b(X_b)$. Nach α) ist $X = (X_a)_{a \in B}$ aus $\mathcal{L}(G)$ und besitzt die in der Aussage geforderten Eigenschaften. Da für alle $a,b \in B$ mit $a < b$ die kanonischen Abbildungen dp_a^b auf $(dp_a^b)^{-1}(\mathfrak{X}_a)$ injektiv operieren, ist X eindeutig bestimmt. ⌋

γ) Für $b \in B$ setzen wir

$\mathfrak{X}^{(b)} := \{X \in \mathcal{L}(G)$: für alle $c > b$ ist $dp_c(X) \in \mathfrak{X}_c\}$ und

$\mathfrak{X} := \bigcup_{b \in B} \mathfrak{X}^{(b)}$. Nach β) ist dp_b eine Bijektion von $\mathfrak{X}^{(b)}$ auf $\mathfrak{X}_b$ und $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}^{(b)} \subseteq \mathrm{Kern}\, dp_b$ $(b \in B)$.

⌈Für jedes $X \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}^{(b)}$ existiert ein $c \in B$ mit $c > b$ und $dp_c(X) \in \mathfrak{X}_c$ und daher $dp_b(X) = dp_b^c(dp_c(X)) \in \mathfrak{X}_b \cup \{0\}$. Wegen $dp_b(X) \notin \mathfrak{X}_b$ folgt $dp_b(X) = 0$. ⌋

Insbesondere ist $\mathfrak{X}^{(b)}$ linear unabhängig und wegen $\mathfrak{X}^{(c)} \supseteq \mathfrak{X}^{(b)}$ für $c > b$ auch $\mathfrak{X}$ linear unabhängig.

δ) $\mathcal{H} := \bigcup_{b \in B} \mathcal{H}_b$ ist ein Lie-System für G.

⌈Es gilt $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H = \bigcap_{b \in B} \bigcap_{H \in \mathcal{H}_b} H = K (= \{e\})$.
Zu $H, L \in \mathcal{H}$ existieren $a, b \in B$ mit $H \in \mathcal{H}_a$ und $L \in \mathcal{H}_b$. Gilt etwa $a \prec b$, so gibt es nach 1.7 ein $K \in \mathcal{H}_b$ mit $K \leq H$ und damit auch ein $N \in \mathcal{H}_b \subseteq \mathcal{H}$ mit $N \subseteq K \cap L \leq H \cap L$. ⌋

ε) $\mathfrak{X}$ ist eine projektive Basis für $\mathcal{L}(G)$ bezüglich $\mathcal{H}$, insbesondere gilt $(\{e\}, \mathfrak{X}) \in \mathbb{K}$.

⌈Für $H \in \mathcal{H}$ existiert ein $b \in B$ mit $H \in \mathcal{H}_b$. Nach γ) gilt
$dp_H(\mathfrak{X}) = dp_H^{K_b} \circ dp_{K_b}(\mathfrak{X}) = dp_H^{K_b}(\mathfrak{X}_b \cup \{0\})$.
Nun sind aber die von Null verschiedenen Elemente von $dp_H^{K_b}(\mathfrak{X}_b)$ eine Basis von $\mathcal{L}(G/H)$. ⌋
Nach γ) gilt $(K_b, \mathfrak{X}_b) \prec (\{e\}, \mathfrak{X})$ für alle $b \in B$. Somit sind alle Aussagen von 2.10 bewiesen. □

2.11 Lemma: Für jedes Paar $(N, \mathfrak{X})$ aus $\mathbb{K}$ mit $N \neq \{e\}$ existert ein $(M, \mathcal{Y}) \in \mathbb{K}$ mit $(M, \mathcal{Y}) \succ (N, \mathfrak{X})$ und $(M, \mathcal{Y}) \neq (N, \mathfrak{X})$.

Beweis: α) Es seien $(N, \mathcal{X}) \in \mathbb{K}$ mit $N \neq \{e\}$ und $\mathcal{H}_N$ ein Lie-System für $(N, \mathfrak{X})$ im Sinn von (K2). Dann existiert ein $K \in \mathcal{H}(G)$ mit $K \cap N \neq N$. Nach 1.6 gibt es für alle $U \in \mathcal{U}(G)$ ein $H \in \mathcal{H}_N$ mit $H \subseteq UN$, so daß HK/NK Untergruppe von G/NK in UNK/NK ist. Da aber $G/NK \cong (G/K)/(NK/K)$ eine Lie-Gruppe ist, muß es ein $H_o \in \mathcal{H}_N$ geben mit $HK = NK$ für alle $H \in \mathcal{H}_N$ mit $H_o \geq H$. Wir setzen $M := N \cap K$ und $\mathcal{H}_M := \{H \cap K : H_o \geq H \in \mathcal{H}_N\}$.

β) Für $H \in \mathcal{H}_N$ mit $H_o \geq H$ betrachten wir das nachfolgende kommutative Diagramm. Mit π, π_H, σ und τ sind dabei die entsprechenden kanonischen Abbildungen bezeichnet.

$$\begin{array}{ccc} G/K\cap N & \overset{\pi}{\dashrightarrow} & G/N \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_H} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ G/K\cap H & \xrightarrow{\sigma} & G/H \end{array}$$

Es sei $L := \operatorname{Kern}\pi = N/K\cap N \cong NK/K$. Wegen $H \supseteq N$ gilt $L \cap \operatorname{Kern}\pi_H = \{K\cap N/K\cap N\}$. Wir wählen nun ein Kern $d\pi_{H_o}$ umfassendes Vektorraum-Komplement W von $\mathcal{L}(L)$ in $\mathcal{L}(G/K\cap N)$. Es ist $\mathcal{L}(G/K\cap N)$ als Vektorraum isomorph zu $\mathcal{L}(L) \oplus W$ und $d\pi: W \to \mathcal{L}(G/N)$ ein Vektorraum-Isomorphismus. $\{Y_i : i \in I\}$ bezeichne das Urbild in W von $\mathfrak{X} = \{X_i : i \in I\}$ unter $d\pi$. Schließlich sei $(Z_j)_{j=1,..,n}$ eine Basis des endlichdimensionalen Vektorraumes $\mathcal{L}(L)$.

γ) $\mathcal{Y}_M$ ist offensichtlich ein Lie-System zu G/M, und $\mathcal{Y} := \{Z_1,..,Z_n\} \cup \{Y_i : i \in I\}$ ist eine projektive Basis von $\mathcal{L}(G/M)$ bezüglich $\mathcal{Y}_M$.

⌈Auf Grund der Konstruktion ist $\mathcal{Y}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren aus $\mathcal{L}(G/K\cap N)$. Für $H \in \mathcal{Y}_N$ mit $H \subset H_o$ gilt $L = N/K\cap N \cong NK/K = HK/K \cong H/K\cap H$ und daher $N/K\cap N \cong H/K\cap H$. Die Isomorphie ist gerade gegeben durch $\operatorname{Res}(L,\pi_H)$. Wir haben daher

$$d\pi_H(\mathcal{L}(L)) = d\pi_H(\mathcal{L}(N/K\cap N)) \cong \mathcal{L}(H/K\cap H) = \operatorname{Kern} d\sigma.$$

Seien nun $I_H := \{i \in I : d\tau(X_i) \neq 0\}$ und $I_o := I \setminus I_H$. Dann ist $(d\tau(X_i))_{i\in I_H}$ eine Basis von $\mathcal{L}(G/H)$ und $\{X_i : i \in I_o\} \subseteq \operatorname{Kern} d\tau$. Für $i \in I_o$ gilt $d\pi_H(Y_i) = 0$.

⌈Aus $0 = d\tau(X_i) = d\tau(d\pi(Y_i)) = d\sigma(d\pi_H(Y_i))$ folgt $d\pi_H(Y_i) \in \operatorname{Kern} d\sigma = d\pi_H(\mathcal{L}(L))$. Es existiert also ein $W_i \in \mathcal{L}(L)$ mit $Y_i = W_i \in \operatorname{Kern} d\pi_H \subseteq W$. Nun ist aber

$Y_i = W_i + (Y_i - W_i)$ aus W. Wegen $W_i \in \mathcal{L}(L)$ und $\mathcal{L}(G/K\cap N) = \mathcal{L}(L) \oplus W$ (vgl.β)) muß schließlich $W_i = 0$ und daher $d\pi_H(Y_i) = d\pi_H(W_i) = 0$ gelten. ⌋

Es ist jetzt nur noch zu zeigen, daß $d\pi_H(\{Z_1,..,Z_n\} \cup \{Y_i : i\in I_H\})$ Basis des Vektorraumes $\mathcal{L}(G/K\cap H)$ ist. Als solcher ist $\mathcal{L}(G/K\cap H)$ isomorph zu $\mathcal{L}(G/H) \oplus$ Kern $d\sigma \tilde{=} \mathcal{L}(G/H) \oplus d\pi_H(\mathcal{L}(L))$ und daher eine $(|I_H| + n)$-dimensionale Lie-Algebra. Wir müssen also nur nachweisen, daß sich jeder Vektor $X \in \mathcal{L}(G/K\cap H)$ als Linearkombination von $d\pi_H(\{Z_1,..,Z_n\} \cup \{Y_i : i\in I_H\})$ darstellen läßt.

⌈$d\sigma(X)$ ist aus $\mathcal{L}(G/H)$, es existieren also $c_i \in \mathbb{R}$ $(i \in I_H)$ mit

$$d\sigma(X) = \sum_{i\in I_H} c_i d\tau(X_i) = \sum_{i\in I_H} c_i d\sigma(d\pi_H(Y_i)).$$

Also ist $X - \sum_{i\in I_H} c_i d\pi_H(Y_i) \in$ Kern $d\sigma = d\pi_H(\mathcal{L}(L))$.

Ferner ist $\mathrm{Res}(\mathcal{L}(L), d\pi_H)$ ein Isomorphismus auf Kern $d\sigma$, es existieren also $d_1,..,d_n \in \mathbb{R}$ mit

$$X - \sum_{i\in I_H} c_i d\pi_H(Y_i) = \sum_{j=1}^{n} d_j d\pi_H(Z_j).$$ ⌋

Daraus folgt die Aussage γ). ⌋

Es ist also gezeigt, daß $(M,\mathfrak{y})$ aus $\mathbb{K}$ ist. $(N,\mathfrak{x}) \neq (M,\mathfrak{y})$ gilt offensichtlich, ebenso $N \supseteq M$. Wir haben $Z_j \subset \mathcal{L}(L) =$ Kern $d\pi$ $(j=1,...,n)$ und $d\pi(Y_i) = X_i$ $(i \in I)$, so daß tatsächlich $(N,\mathfrak{x}) \prec (M,\mathfrak{y})$ erfüllt ist. □

Das Ergebnis der transfiniten Induktion faßt der folgende Satz zusammen.

2.12 Satz: Seien G eine lokalkompakte Gruppe und G_1 eine Lie-projektive offene Untergruppe von G. Dann existieren Familien $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}(G)$ und $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}(G)$, so daß $\mathcal{H}$ ein Lie-System für G_1 ist und $\mathcal{X}$ eine projektive Basis von $\mathcal{L}(G)$ bezüglich $\mathcal{H}$ ist.

Beweis: Das nach 2.8 zu G_1 definierte System $\mathbb{K}$ ist nicht leer, geordnet und nach 2.10 induktiv geordnet. Nach dem Lemma von Zorn besitzt $\mathbb{K}$ maximale Elemente. Auf Grund von 2.11 kann kein Element der Form $(N, \mathcal{X})$ mit $N \neq \{e\}$ maximales Element von $\mathbb{K}$ sein. Also muß für jedes maximale Element von $\mathbb{K}$ stets $N = \{e\}$ gelten. Die Behauptung gilt nach 2.6 bezüglich der Lie-Algebra $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G)$. □

2.13 Korollar: Ist G metrisierbar, so läßt sich eine abzählbare projektive Basis von $\mathcal{L}(G)$ konstruieren.

Beweis: Ist G metrisierbar, so auch G_1. Nach 1.8 a) existiert ein abzählbares und absteigendes Lie-System $\mathcal{H} = \{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ zu G_1. Für $m < n$ gilt $H_m \geq H_n$ und daher $\operatorname{Ker} dp_m = \mathcal{L}(H_m) \geq \mathcal{L}(H_n) = \operatorname{Ker} dp_n$. Diese Ideale sind von endlicher Kodimension in $\mathcal{L}(G)$. Nun wähle man eine Basis $\mathcal{X}_0$ eines Vektorraum-Komplementes $\mathcal{L}(G)_{H_0}$ von $\mathcal{L}(H_0)$ in $\mathcal{L}(G)$. Dann ist $dp_0(\mathcal{X}_0)$ eine Basis von $\mathcal{L}(G/H_0)$. Jede Basis $\mathcal{X}_n$ eines Komplementes $\mathcal{L}(G)_{H_n}$ von $\mathcal{L}(H_n)$ in $\mathcal{L}(G)$ kann man aber zu einer Basis $\mathcal{X}_{n+1}$ des Komplementes $\mathcal{L}(G)_{H_{n+1}}$ von $\mathcal{L}(H_{n+1})$ in $\mathcal{L}(G)$ ergänzen. Es gilt $\mathcal{X}_{n+1} \setminus \mathcal{X}_n \subseteq \mathcal{L}(H_n)$ und daher $dp_n(X) = 0$ für $X \in \mathcal{X}_{n+1} \setminus \mathcal{X}_n$, und $dp_{n+1}(\mathcal{X}_{n+1})$ bildet eine Basis von $\mathcal{L}(G/H_{n+1})$. Im Sinn von 2.8 ist daher $(H_n, \mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

eine linear geordnete (abzählbare) Familie aus $\mathcal{K}$. Analog zu 2.10 prüft man leicht nach, daß $\mathcal{X} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_n$ eine projektive Basis von $\mathcal{L}(G)$ bezüglich $\leq$ ist. □

§ 3 Gleichmäßige Differenzierbarkeit

Der Begriff der Differenzierbarkeit reellwertiger Funktionen auf einer lokalkompakten Gruppe wurde zuerst von BOSECK [2] und in neuerer Zeit von EDAMATSU [7] systematisch untersucht. Er gründet sich auf die Isomorphie von $\mathcal{L}(G)$ und $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ (vgl. 1.10). Im folgenden sei G eine lokalkompakte Gruppe.

3.1 Definition: Seien $f \in C(G)$ und $X \in \mathcal{L}(G)$.

f heißt rechtsseitig differenzierbar in $x \in G$ bezüglich X (kurz: "$\overrightarrow{X}f(x)$ existiert"), falls

$$\overrightarrow{X}f(x) := \lim_{t \to o} \frac{1}{t}\{f(x\lambda_X(t)) - f(x)\} \text{ existiert.}$$

f heißt linksseitig differenzierbar in $x \in G$ bezüglich X (kurz: "$\overleftarrow{X}f(x)$ existiert"), falls

$$\overleftarrow{X}f(x) := \lim_{t \to o} \frac{1}{t}\{f(\lambda_X(t)x) - f(x)\} \text{ existiert.}$$

f heißt stetig rechtsseitig (linksseitig) differenzierbar bezüglich X, falls $\overrightarrow{X}f(x)$ (bzw. $\overleftarrow{X}f(x)$) für alle $x \in G$ existiert und eine stetige Funktion auf G definiert.

3.2 Bemerkung: a) Eine Funktion f aus C(G) ist genau dann (stetig) rechtsseitig differenzierbar bezüglich X für alle $X \in \mathcal{L}(G)$, falls f (stetig) linksseitig differenzierbar ist bezüglich X für alle $X \in \mathcal{L}(G)$ ([2], 1.1).

b) Für eine Lie-Gruppe G stimmt die Klasse $\mathcal{L}_1(G)$ der in in a) beschriebenen stetig differenzierbaren Funktionen mit den bezüglich der differenzierbaren Struktur auf G stetig differenzierbaren Funktionen überein ([2], 1.4).

Im Rahmen dieser Arbeit stehen Eigenschaften der Ableitung als (linearer) Operator von $C(G) \times \mathcal{L}(G)$ in $C(G)$ im Vordergrund. Dazu ist eine Verschärfung des Begriffes der Differenzierbarkeit notwendig, die für Lie-Gruppen bereits in [13], 4.1 und [15] verwendet wird.

3.3 Definition: a) Seien $f \in C_o(G)$ und $X \in \mathcal{L}(G)$.

f heißt rechtsseitig gleichmäßig differenzierbar bezüglich X (kurz: "$\vec{X}f$ existiert"), falls

$$\vec{X}f := \|\cdot\|_o\text{-}\lim_{t \to o} \frac{1}{t}\{R_{\lambda_X(t)}f - f\} \text{ existiert.}$$

f heißt linksseitig gleichmäßig differenzierbar bezüglich X (kurz: "$\overleftarrow{X}f$ existiert"), falls

$$\overleftarrow{X}f := \|\cdot\|_o\text{-}\lim_{t \to o} \frac{1}{t}\{L_{\lambda_X(t)}f - f\} \text{ existiert.}$$

b) Die gleichmäßigen Ableitungen höherer Ordnung werden induktiv definiert. Seien $k \in \{2,3,\ldots\}$, $X_j \in \mathcal{L}(G)$ für $j = 1,\ldots,k$ und $f \in C_o(G)$.

f heißt rechtsseitig k-fach gleichmäßig differenzierbar bezüglich $X_1 \ldots X_k$ (kurz: "$\vec{X}_1 \ldots \vec{X}_k f$ existiert"), falls $\vec{X}_2 \ldots \vec{X}_k f$ und $\vec{X}_1(\vec{X}_2 \ldots \vec{X}_k f)$ existieren. Die linksseitigen Ableitungen höherer Ordnung werden analog definiert.

3.4 Vereinbarung: a) Alle im weiteren bewiesenen Aussagen über die ersten Ableitungen lassen sich durch Induktion auch für Ableitungen höherer Ordnung gewinnen. Es wird darauf verzichtet, dies im einzelnen zu formulieren.

b) Falls Aussagen für die linksseitigen genau so wie für die rechtsseitigen Ableitungen gelten, wird zur Vereinfachung die diesbezügliche Kennzeichnung weggelassen.

Die Einschränkung der gleichmäßigen Differenzierbarkeit auf die im Unendlichen verschwindenden stetigen Funktionen ist wohlbegründet. Schon für die Linearität des Ableitungsoperators etwa ist die gleichmäßige Stetigkeit der zu differenzierenden Funktionen notwendig. Die Bevorzugung des Raumes $C_o(G)$ vor dem Raum der gleichmäßig stetigen beschränkten Funktionen auf G geschieht im Hinblick auf die Anwendung. Für die Dichtheit der Testfunktionen im Raum der gleichmäßig differenzierbaren Funktionen (vgl. § 4) und für die Betrachtung von Wahrscheinlichkeitsoperatoren ist die Verwendung von $C_o(G) = \overline{\mathcal{K}(G)}$ angebracht. Für eine kompakte Gruppe G gilt natürlich $C_o(G) = C(G)$. Auch die stetige und die gleichmäßige Differenzierbarkeit sind dann gleichwertig, wie sich aus der folgenden Proposition sofort ergibt.

3.5 Proposition: Seien $f \in C(G)$ und $X \in \mathcal{L}(G)$. Ist f stetig rechts- oder linksseitig differenzierbar bzgl. X, und ist $x \mapsto \overrightarrow{Xf}(x)$ gleichmäßig stetig bzgl. der linksuniformen Struktur auf G (bzw. $x \mapsto \overleftarrow{Xf}(x)$ gleichmäßig stetig bzgl. der rechtsuniformen Struktur auf G), so existiert $\overrightarrow{Xf}$ (bzw. $\overleftarrow{Xf}$) bereits gleichmäßig.

Beweis: Nach 3.2 sind die Voraussetzungen der stetigen rechtsseitigen oder linksseitigen Differenzierbarkeit von f bzgl. X gleichwertig. Sei also f stetig rechtsseitig differenzierbar bzgl. X und $x \mapsto \vec{X}f(x)$ gleichmäßig stetig bzgl. der linksuniformen Struktur auf G. Wir setzen $\lambda := \lambda_X$. Dann ist $t \mapsto f(x\lambda(t))$ (im reellwertigen Sinn) differenzierbar in $t = o$ für alle $x \in G$. Diese Abbildung ist sogar differenzierbar für alle $t \in \mathbb{R}$, und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(x\lambda(t)) &= \lim_{h \to o} \frac{1}{h}\{f(x\lambda(t+h)) - f(x\lambda(t))\} \\ &= \lim_{h \to o} \frac{1}{h}\{f(x\lambda(t)\lambda(h)) - f(x\lambda(t))\} \\ &= \vec{X}f(x\lambda(t)).\end{aligned}$$

Zu $x \in G$ und $t \in \mathbb{R}$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein $s = s(x,t)$ aus $[-|t|, |t|]$ mit $f(x\lambda(t)) - f(x) = t\vec{X}f(x\lambda(s))$. Nun ist $\vec{X}f$ gleichmäßig stetig bezüglich der linksuniformen Struktur auf G. Für hinreichend kleines t liegt $\lambda(s)$ für alle $x \in G$ in einer kleinen Umgebung von e, und

$$\begin{aligned}&\left\| \frac{1}{t}\{R_{\lambda(t)} f - f\} - \vec{X}f \right\|_o \\ &= \sup_{x \in G} \left| \frac{1}{t}\{f(x\lambda(t)) - f(x)\} - \vec{X}f(x) \right| \\ &= \sup_{x \in G} \left| \vec{X}f(x\lambda(s)) - \vec{X}f(x) \right|\end{aligned}$$

ist daher beliebig klein. □

Insbesondere existiert also für $X \in \mathcal{L}(G)$ und $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $\vec{X}f$ auch stets $\overleftarrow{X}f$. Die Gleichwertigkeit der Existenz von rechts- und linksseitiger Ableitung kann aber auch durch Eigenschaften der zugrunde liegenden Gruppe bedingt sein.

3.6 Proposition: Es sei G eine lokalkompakte Gruppe, für welche $\{\lambda^x : x \in G\}$ relativ kompakt in $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ ist für alle $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$. Für $f \in C_o(G)$ und $X \in \mathcal{L}(G)$ existiert $\overrightarrow{X}f$ genau dann, wenn $\overleftarrow{X}f$ existiert.

Beweis: Für alle $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ ist $(\lambda^x)_{x\in G}$ nach Voraussetzung relativ kompakt in $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ und daher gleichgradig stetig in o. Für alle $U \in \mathcal{U}(G)$ existiert also ein $h_U > 0$, so daß $\lambda^x(h) \in U$ für alle $h \in [-h_U, h_U]$ und alle $x \in G$ gilt.
Für $f \in C_o(G)$ und $X \in \mathcal{L}(G)$ existiere $\overrightarrow{X}f$ $(\in C_o(G))$. Wir setzen $\lambda = \lambda_X$. Dann existiert

$$\overleftarrow{X}f(x) = \lim_{h\to o} \frac{1}{h}\{f(\lambda(h)x) - f(x)\} = \lim_{h\to o} \frac{1}{h}\{f(x\lambda^x(h)) - f(x)\}$$

punktweise für alle $x \in G$ (vgl. 3.2).
Nach dem Satz von Taylor gibt es für alle $h \in \mathbb{R}$, $x \in G$ ein $s = s(h) \in [-|h|, |h|]$ mit $f(x\lambda^x(h)) - f(x) = h\overrightarrow{X}f(x\lambda^x(s(h)))$.
Für alle $U \in \mathcal{U}(G)$, alle $h,h' \in [-h_U, h_U]$ und alle $x \in G$ ist daher $\lambda^x(s(h',x)) \in U$. Für eine genügend kleine Umgebung $U \in \mathcal{U}(G)$ ist dann

$$\sup_{x\in G}\left|\frac{1}{h}\{f(\lambda(h)x) - f(x)\} - \frac{1}{h'}\{f(\lambda(h')x) - f(x)\}\right|$$

$$= \sup_{x\in G}\left|\frac{1}{h}\{f(x\lambda^x(h)) - f(x)\} - \frac{1}{h'}\{f(x\lambda^x(h')) - f(x)\}\right|$$

$$= \sup_{x\in G}\left|\overrightarrow{X}f(x\lambda^x(s(h,x))) - \overrightarrow{X}f(x\lambda^x(s(h',x)))\right| < \varepsilon.$$

Auf Grund dieser Cauchy-Bedingung existiert $\overleftarrow{X}f$ gleichmäßig. □

Die in der Proposition geforderte Eigenschaft von G ist eine Verallgemeinerung des Begriffes der relativ kompakten adjungierten Gruppe, der aus der Theorie der Lie-Gruppen bekannt ist. In 4.8 werden wir darauf näher eingehen.

Die im folgenden zusammengestellten Eigenschaften der Ableitung sind aus der Theorie der Lie-Gruppen bekannt und leiten sich direkt aus der Definition ab. Sie gelten zum Teil auch für die punktweise Differentiation (vgl. [2]).

3.7 Bemerkung: Seien $X \in \mathcal{L}(G)$, $f \in C_0(G)$ und $x \in G$.

a) Existiert $\overrightarrow{X}f(e)$, so auch $\overleftarrow{X}f(e)$, und es gilt $\overleftarrow{X}f(e) = \overrightarrow{X}f(e)$.
Existiert $\overleftarrow{X}f$, so auch $\overleftarrow{X}(R_x f)$, und es gilt $\overleftarrow{X}(R_x f) = R_x(\overleftarrow{X}f)$.
Existiert $\overrightarrow{X}f$, so auch $\overrightarrow{X}(L_x f)$, und es gilt $\overrightarrow{X}(L_x f) = L_x(\overrightarrow{X}f)$.

b) Existieren Xf und Xg für $f,g \in C_0(G)$, so existiert auch $X(f\cdot g)$, und es gilt $X(f\cdot g) = Xf\cdot g + f\cdot Xg$.

c) Existiert Xf und besitzt f in x ein lokales Extremum, so gilt $Xf(x) = 0$.

d) Für jede Abbildung $g:G \to \mathbb{R}$ mit $g^* \in L_1(\omega)$ existiert mit $\overleftarrow{X}f$ auch $\overleftarrow{X}(f*g)$ und es gilt $\overleftarrow{X}(f*g) = \overleftarrow{X}f*g$ sowie $\|\overleftarrow{X}(f*g)\|_0 \leq \|\overleftarrow{X}f\|_0 \cdot \|g^*\|_{L_1}$.
Für jede Abbildung $g \in L_1(\omega)$ existiert mit $\overrightarrow{X}f$ auch $\overrightarrow{X}(g*f)$ und es gilt $\overrightarrow{X}(g*f) = g*\overrightarrow{X}f$ sowie $\|\overrightarrow{X}(g*f)\|_0 \leq \|g\|_{L_1} \cdot \|\overrightarrow{X}f\|_0$ (vgl. [19], 1.7).

3.8 Satz (Linearität des Ableitungsoperators):

a) Seien $X \in \mathcal{L}(G)$, $f,g \in C_0(G)$ und $r,s \in \mathbb{R}$.
Existieren Xf und Xg, so existiert auch $X(rf + sg)$, und es gilt $X(rf + sg) = rXf + sXg$.

b) Seien $X,Y \in \mathcal{L}(G)$, $f \in C_o(G)$ und $r,s \in \mathbb{R}$.
Existieren Xf und Yf, so existiert auch $(rX + sY)f$, und es gilt $(rX + sY)f = rXf + sYf$.

Beweis: a) Die Aussage läßt sich ohne Schwierigkeiten aus der Definition ableiten.

b) Die Homogenität $(r\overleftarrow{X})f = r(\overleftarrow{Xf})$ für $r \in \mathbb{R}$ ergibt sich aus der Gleichung

$$\left\|\frac{1}{t}\{L_{\lambda_{rX}(t)}f - f\} - (r\overleftarrow{X})f\right\|_o = |r|\left\|\frac{1}{rt}\{L_{\lambda_X(rt)}f - f\} - \overleftarrow{Xf}\right\|_o.$$

Zum Nachweis der Additivität sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Es läßt sich nach Voraussetzung ein $\delta > 0$ finden, so daß

$\left\|\frac{1}{t}\{L_{\lambda_Z(t)}f - f\} - Zf\right\|_o < \varepsilon$ für $o < |t| < \delta$ und $Z \in \{X,Y\}$

erfüllt ist. Zu jedem t existieren aber ein $U_t \in \mathcal{U}(G)$ mit $\|f - L_y f\|_o < t\varepsilon$ für alle $y \in U_t$ und ein $k_t \in \mathbb{N}$ mit $(\lambda_X(t/k)\lambda_Y(t/k))^k \lambda_{X+Y}(-t) \in U_t$ für $k > k_t$.

Setzt man nun $u := t/k$ und $P(X,Y,j,t) := (\lambda_X(u)\lambda_Y(u))^j$ $(j \in \mathbb{N})$, so gilt unter dieser Wahl

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{t}\{L_{\lambda_{(X+Y)}(t)}f - f\} - (\overleftarrow{Xf} + \overleftarrow{Yf})\right\|_o \\
&= \sup_{x\in G}\left|\frac{1}{t}\{f(\lambda_{X+Y}(t)x) - f(P(X,Y,k,t)x)\}\right| \\
&\quad + \sup_{x\in G}\left|\frac{1}{t}\{f(\lambda_X(u)P(Y,X,k-1,t)\lambda_Y(u)x) - f(P(Y,X,k-1,t)\lambda_Y(u)x)\}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{k}\overleftarrow{Xf}(P(Y,X,k-1,t)x)\right| + \ldots \\
&\quad + \sup_{x\in G}\left|\frac{1}{t}\{f(\lambda_Y(u)x) - f(x)\} - \frac{1}{k}\overleftarrow{Yf}(x)\right| < 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Der Ableitungsoperator $D:(X,f) \mapsto Xf$ ist auf seinem Definitionsbereich im allgemeinen nicht stetig. Gegenbeispiele sind in Paragraph 5 angegeben. Er ist jedoch ein abgeschlossener Operator. Dies läßt sich ähnlich beweisen wie die Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzübergang in der Analysis.

3.9 Satz (Abgeschlossenheit des Ableitungsoperators):

a) Seien $f \in C_o(G)$ und $(Y_b)_{b\in B} \subseteq \mathcal{L}(G)$ ein gegen ein $Y \in \mathcal{L}(G)$ konvergentes Netz. Es existiere $Y_b f$ für $b \in B$ sowie $g := \lim_{b\in B} Y_b f$. Dann existiert Yf und stimmt mit g überein.

b) Seien $X \in \mathcal{L}(G)$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $f \in C_o(G)$ konvergente Folge aus $C_o(G)$. Es existiere Xf_n für $n \in \mathbb{N}$ sowie $g := \lim_{n\in\mathbb{N}} Xf_n$. Dann existiert Xf und stimmt mit g überein.

Beweis: a) Für $b \in B$ setzen wir $\lambda_{(b)} := \lambda_{Y_{(b)}}$. Nach Definition ist f linksseitig differenzierbar bezüglich $Y_{(b)}$ genau dann, wenn es ein $Y_{(b)}f \in C_o(G)$ und ein $r_{(b)}: G\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $r_{(b)}(x,o) = o = \lim_{t\to o} \sup_{x\in G} r_{(b)}(x,t)$ gibt, so daß für $x \in G$ und $t \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$f(\lambda_{(b)}(t)x) - f(x) = t\cdot Y_{(b)}f(x) - t\cdot r_{(b)}(x,t)$$ gilt.

In diesem Fall ist für $t \mapsto f(\lambda_{(b)}(t)x)$ eine Taylor-Entwicklung in o bis zur ersten Ordnung gültig (vgl. auch den Beweis von 3.5). Wendet man die Taylor-Entwicklung auf die Abbildung $t \mapsto f(\lambda_b(t)x) - f(\lambda_c(t)x)$ an $(b,c \in B)$, so gibt es zu $x \in G$ und $t \in [-1,1]$ ein s aus $[-|t|,|t|]$, so daß für die Differenz der "Restglieder" gilt:

$$\begin{aligned}
&|r_b(x,t) - r_c(x,t)| \\
&\le |Y_b f(\lambda_b(s)x) - Y_b f(\lambda(s)\lambda_b(-s)\lambda_b(s)x)| \\
&+ |Y_c f(\lambda_c(s)x) - Y_c f(\lambda(s)\lambda_c(-s)\lambda_c(s)x)| \\
&+ 2\|Y_b f - Y_c f\|_o .
\end{aligned}$$

Nun ist $(Y_b f)_{b\in B}$ Cauchy-Netz. Es existiert also ein $b_o \in B$, so daß $(Y_b)_{b>b_o}$ gleichgradig gleichmäßig stetig ist. Aus der Konvergenz von $(\lambda_b)_{b\in B}$ folgt, daß $(r_b)_{b\in B}$ ein $\|\cdot\|_o$-Cauchy-Netz ist. Für den Grenzwert r gelten wieder

$$r(x,o) = 0 = \lim_{t\to o} \sup_{x\in G} r(x,t) \quad \text{und}$$
$$f(\lambda(t)x) - f(x) = t\cdot g(x) + t\cdot r(x,t).$$

Also existiert Yf und stimmt mit g überein.

Behauptung b) wird analog gezeigt. □

§ 4 Räume differenzierbarer Funktionen

Ist $\mathfrak{X}$ eine projektive Basis der Lie-Algebra $\mathcal{L}(G)$ einer lokalkompakten Gruppe G, so kann man Banach-Räume der bezüglich $\mathfrak{X}$ k-mal gleichmäßig differenzierbaren Funktionen als Folgenräume in $C_o(G)$ einführen. Ist G eine Lie-Gruppe, so sind dies gerade die Räume $C_k(G)$ der k-fach differenzierbaren Funktionen, versehen mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen bis zur Ordnung k.

Für die lokalkompakte Gruppe G fixieren wir also eine Lie-projektive offene Untergruppe G_1, ein Lie-System $\mathfrak{h} = \{H_a : a \in A\}$ für G_1 sowie eine projektive Basis $\mathfrak{X} = \{X_i : i \in I\}$ von $\mathcal{L}(G)$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Für $k \in \mathbb{N}$, $f \in C_o(G)$, $\alpha = (\alpha_1,..,\alpha_k) \in I^k$ und $X_{\alpha_i} \in \mathcal{L}(G)$ $(j=1,..,k)$ setzen wir $X_\alpha f := X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_k} f$, falls die rechte Seite der Gleichung existiert.

4.1 Definition: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\overrightarrow{C}_k(G)$ die Menge der $f \in C_o(G)$, für die $\overrightarrow{X}_\alpha f$ für alle $j \leq k$, $\alpha \in I^j$ und $X_{\alpha_i} \in \mathcal{L}(G)$ $(i = 1,\ldots,j)$ existiert und

$\|f\|_k^{\rightarrow} := \|f\|_o + \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha \in I^j} \|\overrightarrow{X}_\alpha f\|_o$ endlich ist.

$\overleftarrow{C}_k(G)$ sei die Menge der $f \in C_o(G)$, für die $\overleftarrow{X}_\alpha f$ für alle $j \leq k$, $\alpha \in I^j$ und $X_{\alpha_i} \in \mathcal{L}(G)$ $(i = 1,\ldots,j)$ existiert und

$\|f\|_k^{\leftarrow} := \|f\|_o + \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha \in I^j} \|\overleftarrow{X}_\alpha f\|_o$ endlich ist.

$C_k(G)$ werde auch als Raum der C_k-Funktionen bezeichnet.

4.2 Proposition: Für jedes $k \in \mathbb{Z}_+$ ist $C_k(G)$ eine Algebra bezüglich der punktweisen Multiplikation.
$f \mapsto \|f\|_k$ definiert eine Norm auf $C_k(G)$. Schließlich gilt $C_{k+1}(G) \subseteq C_k(G)$.

Beweis: Die Aussagen folgen direkt aus den Definitionen, aus 3.8 und 3.7 b). Für $f,g \in C_k(G)$ gewinnt man mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes die Abschätzung $\|f \cdot g\|_k \leq 2^{k+1} \|f\|_k \cdot \|g\|_k$. Daraus folgt die Abgeschlossenheit von $C_k(G)$ bezüglich der Multiplikation. □

4.3 Bemerkung:

a) Ist G Lie-Gruppe, so stimmt die obige Definition von $C_k(G)$ auf Grund von 3.8 mit der üblichen Definition überein ([13], 4.1.6).

b) Für $f \in C_k(G)$ ist $\{\alpha \in I^j : \|X_\alpha f\|_o \neq o,\ j \leq k\}$ höchstens abzählbar.

c) Nach 3.7 a) sind für $x \in G$ die Abbildungen R_x bzw. L_x Homöomorphismen von $\overleftarrow{C}_k(G)$ bzw. $\overrightarrow{C}_k(G)$.

d) Für $f \in \overleftarrow{C}_k(G)$ und $g: G \to \mathbb{R}$ mit $g^* \in L_1(\omega)$ ist $f * g$ aus $\overleftarrow{C}_k(G)$, und es gilt $\|f * g\|_k^{\leftarrow} \leq \|g^*\|_{L_1} \cdot \|f\|_k^{\leftarrow}$.
Für $f \in \overrightarrow{C}_k(G)$ und $g \in L_1(\omega)$ ist $g * f$ aus $\overrightarrow{C}_k(G)$, und es gilt $\|g * f\|_k^{\rightarrow} \leq \|g\|_{L_1} \cdot \|f\|_k^{\rightarrow}$ (vgl. dazu 3.7 d)).

e) Für jedes W-Maß μ auf G und jedes $x \in G$ gilt $L_x \circ T_\mu = T_\mu \circ L_x$. Für $X \in \mathcal{L}(G)$ und $f \in \overleftarrow{C}_1(G)$ ist daher $T_\mu f \in \overleftarrow{C}_1(G)$ und es gilt $\overleftarrow{X} T_\mu f = T_\mu \overleftarrow{X} f$ sowie $\|T_\mu f\|_k^{\leftarrow} \leq \|f\|_k^{\leftarrow}$ $(k \in \mathbb{N})$ (vgl. [13], 4.1 b).

Die erfolgreiche Anwendung der Räume $C_k(G)$ im zweiten Kapitel beruht wesentlich auf ihrer Vollständigkeit.

4.4 Satz: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $(C_k(G), \|\cdot\|_k)$ ein Banachraum.

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $(C_k(G), \|\cdot\|_k)$. Auf Grund der Abgeschlossenheit des Ableitungsoperators und der Vollständigkeit von $C_o(G)$ existiert ein $f \in C_o(G)$, für welches $X_\alpha f$ existiert und gleich $\|\cdot\|_o\text{-}\lim_{n\in\mathbb{N}} X_\alpha f_n$ ist für alle $j \leq k$, $\alpha \in I^j$ und $X_{\alpha_i} \in \mathcal{L}(G)$ $(i = 1,\ldots,j)$.
Der Nachweis der Zugehörigkeit von f zu $C_k(G)$ wird wie der Beweis der Vollständigkeit der Folgenräume $l_1(I)$ geführt.
Für jedes $\varepsilon > o$ existiert ein $n_o \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha\in J_1\times\ldots\times J_i} \|X_\alpha f_n - X_\alpha f_m\|_o < \varepsilon/2$$

für alle $m,n \geq n_o$ und jedes $J := J_1\times\ldots\times J_k \in \mathcal{T}(I)^k$.
Zu J existiert ein $m_o \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha\in J_1\times\ldots\times J_i} \|X_\alpha f_m - X_\alpha f\|_o < \varepsilon/2$$

für alle $m \geq m_o$. Also ist

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha\in J_1\times\ldots\times J_i} \|X_\alpha f_n - X_\alpha f\|_o : J_1\times\ldots\times J_k \in \mathcal{T}(I)^k,\ n \geq n_o \right\}$$

beschränkt durch ε und daher konvergent in $n \in \mathbb{N}$ und in $J \in \mathcal{T}(I)^k$. Es gilt $\sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha\in I^j} \|X_\alpha f - X_\alpha f_n\|_o < \varepsilon$ für $n \geq n_o$.
Somit ist f aus $C_k(G)$ und es gilt $f = \|\cdot\|_k\text{-}\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n$. □

Eine von der Wahl des Lie-Systems und der projektiven Basis von $\mathcal{L}(G)$ unabhängige Definition von Räumen k-fach gleichmäßig differenzierbarer Funktionen geht auf BRUHAT [4]

zurück. Wesentlich für diesen Zugang ist die Vertauschbarkeit der Ableitung mit der Translation gemäß 3.7 a) und mit den Projektionen auf die Faktorgruppen (vgl.Paragraph 1).

Es seien im folgenden die Bezeichnungen G_a, p_a^b und dp_a^b ($a,b \in A$, $a < b$) gemäß 1.5 bezüglich dem Lie-System $\mathfrak{h}$ von G_1 gewählt. Insbesondere sind die Räume $C_k(G_a)$ für alle $a \in A$ und $k \in \mathbb{N}$ erklärt.

4.5 Definition: Für $k \in \mathbb{N}$ werden

$$\overrightarrow{C}^k(G_1) := \bigcup_{a \in A} \{f^a \circ p_a : f^a \in \overrightarrow{C}_k(G_a)\} \quad \text{sowie}$$

$$\overleftarrow{C}^k(G_1) := \bigcup_{a \in A} \{f^a \circ p_a : f^a \in \overleftarrow{C}_k(G_a)\} \quad \text{gesetzt.}$$

Für $x \in G$ seien nun

$$\overrightarrow{C}^k(x^{-1}G_1) := \{L_x f : f \in \overrightarrow{C}^k(G_1)\} \quad \text{und}$$

$$\overleftarrow{C}^k(G_1 x^{-1}) := \{R_x f : f \in \overleftarrow{C}^k(G_1)\}.$$

Dann werden durch $\overrightarrow{C}^k(G) := \bigoplus_{z \in Z} \overrightarrow{C}^k(z^{-1} G_1)$ und $\overleftarrow{C}^k(G) := \bigoplus_{z \in Z} \overleftarrow{C}^k(G_1 z^{-1})$ die Mengen der C^k-Funktionen auf G definiert. Dabei wird die direkte Summe jeweils über ein Repräsentantensystem von Links- bzw. Rechtsnebenklassen von G_1 gebildet.

Der von BRUHAT eingeführte Raum $\mathcal{D}(G)$ der Testfunktionen auf G wird, von den Räumen $\mathcal{D}(G_a)$ ($a \in A$) ausgehend, völlig analog definiert. Es gilt aber $\bigoplus_{x \in Z} \mathcal{D}(x^{-1}G_1) = \bigoplus_{y \in Z'} \mathcal{D}(G_1 y^{-1}) =: \mathcal{D}(G)$, wobei sich die Summe über beliebige Repräsentantensysteme von Nebenklassen von G_1 erstreckt.

Die Räume $C^k(G)$ und $\mathcal{J}(G)$ sind Vektorräume und offensichtlich von der Wahl des Repräsentanten-Systems unabhängig. Eine Funktion $f \in C_o(G)$ gehört zu $\overleftarrow{C}^k(G)$ genau dann, wenn es ein Repräsentantensystem Z von Linksnebenklassen von G_1 und eine Familie $(f_z)_{z\in Z}$ aus $\overleftarrow{C}^k(G_1)$ gibt mit $f = \bigoplus_{z\in Z} R_z f_z$. Insbesondere hat man $f = \sum_{z\in Z} (R_z f_z \oplus 0) = \sum_{z\in Z} R_z(f_z \oplus 0)$, wobei $f_z \oplus 0$ die durch 0 auf G fortgesetzte Funktion f_z ist. Entsprechendes gilt für $\overrightarrow{C}^k(G)$. Ist G Lie-Gruppe, so gilt $C^k(G) = C_k(G)$.

Auf Grund der Verfeinerungseigenschaft von Lie-Systemen nach 1.7 sind die Räume $C^k(G)$ von der Wahl des Lie-Systems unabhängig.

4.6 Proposition: Für alle $a,b \in A$ mit $a \prec b$ ist durch $\hat{p}_a^b(f^a) := f^a \circ p_a^b$ ein injektiver Vektorraum-Homomorphismus $\hat{p}_a^b$ von $C_k(G_a)$ in $C_k(G_b)$ definiert ($k \in \mathbb{N}$). Für alle $X = (X^a)_{a\in A} \in \mathcal{L}(G)$ und alle $f^a \in C_1(G_a)$ existiert $X^b(\hat{p}_a^b(f^a))$ und ist gleich $(dp_a^b(X^b)f^a)\circ p_a^b$, es gilt also $X^b(f^a \circ p_a^b) = (X_a f^a)\circ p_a^b$.

Beweis: Es reicht, die Aussage für k=1 und die linksseitige Ableitung zu beweisen. Für $x \in G$ sei $x_a := p_a(x)$ $(a \in A)$. Nach § 1 gilt für $f^a \in \overleftarrow{C}_1(G_a)$ und $X = (X^a)_{a\in A} \in \mathcal{L}(G)$ aber

$$\frac{1}{t}\{L_{\exp_b(tX^b)}(f^a \circ p_a^b)(x_b) - (f^a \circ p_a^b)(x_b)\} - (X^a f^a)\circ p_a^b(x_b)$$
$$= \frac{1}{t}\{f^a\, p_a^b(\exp_b(tX^b\, x_b) - (f^a \circ p_a^b)(x_b)\} - (X^a f^a)(x_a)$$
$$= \frac{1}{t}\{f^a(\exp_a(tX^a)x_a) - f^a(x_a)\} - (X^a f^a)(x_a).$$

Also ist $f^a \circ p_a^b \in C_1(G_b)$ und es gilt $\overleftarrow{X}^b(\hat{p}_a^b(f^a)) = (\overleftarrow{X}^a f^a)\circ p_a^b$. Die Homomorphie-Eigenschaften von $\hat{p}_a^b$ lassen sich leicht nachrechnen. Die Injektivität folgt aus der Surjektivität von p_a^b. □

4.7 Korollar: Der Raum $C^k(G)$ ist von der Wahl des Lie-Systems in G_1 unabhängig.

Beweis: Es genügt, die Behauptung für $G = G_1$ zu zeigen. Seien dazu $\mathcal{H}_A = \{H_a : a \in A\}$ und $\mathcal{H}_B = \{H_b : b \in B\}$ zwei Lie-Systeme für G. Ist f aus $C^k(G)$ bezüglich $\mathcal{H}_A$, so existieren ein $a \in A$ und ein $f^a \in C_k(G/H_a)$ mit $f = f^a \circ p_a$. Nach 1.7 existiert ein H_b aus $\mathcal{H}_B$ mit $H_b \subseteq H_a$. Nun gilt $f = f^a \circ p_a^b \circ p_b$. Nach 4.6 ist $f^a \circ p_a^b \in C_k(G/H_b)$. Somit ist f auch aus $C^k(G)$ bezüglich $\mathcal{H}_B$. □

Das in 3.6 vorgestellt Kriterium für die Gleichwertigkeit der Existenz von $\overrightarrow{X}f$ und $\overleftarrow{X}f$ ist auch hinreichend für die Übereinstimmung von $\overrightarrow{C}^k(G)$ und $\overleftarrow{C}^k(G)$. Dieser Aussage sei eine Bemerkung vorausgeschickt.

4.8 Bemerkung: Sei G eine Lie-Gruppe. Für $X \in \mathcal{L}(G)$ und $x \in G$ bezeichne $Ad(x)X$ den zu $(\lambda_X)^x$ gehörigen Vektor aus $\mathcal{L}(G)$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

(i) Für alle $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ ist $\{\lambda^x : x \in G\}$ relativ kompakt in $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$.

(ii) Das Bild von G in der (topologischen) Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(G))$ von $\mathcal{L}(G)$ unter der adjungierten Darstellung $Ad: x \mapsto Ad(x)$ ist relativ kompakt (d. h., G besitzt eine relativ kompakte adjungierte Gruppe (vgl. [19], 8. und [10], II.5)).

Beweis: Die Aussage folgt aus der Isomorphie von $\mathcal{L}(G)$ und $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ sowie der Äquivalenz von schwacher Topologie und Norm-Topologie in den endlich-dimensionalen Räumen $\mathcal{L}(G)$ und $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(G))$. □

Im Fall einer Lie-Gruppe wurde die Übereinstimmung von $\vec{C}_k(G)$ und $\overleftarrow{C}_k(G)$ von SIEBERT untersucht ([19], 8.). Sie gilt genau dann, wenn G eine relativ kompakte adjungierte Gruppe besitzt. Die Bedingung aus 3.6 verallgemeinert diese Aussage.

4.9 Proposition: Erfüllt eine lokalkompakte Gruppe G die Bedingung (i) aus 4.8, so gilt $\vec{C}^k(G) = \overleftarrow{C}^k(G)$ $(k \in \mathbb{N})$.

Beweis: Für alle $H \in \mathcal{H}$ ist die kanonische Abbildung δp_H stetig (1.11). Also ist $\{\delta p_H(\lambda^x): x \in G\} = \{(p_H \circ \lambda)^{p_H(x)}: p_H(x) \in G/H\}$ relativ kompakt in $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G/H) = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G_1/H)$ für alle $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$. Auf Grund der Surjektivität von p_H bzw. δp_H ist daher $\{\lambda^x: x \in G/H\}$ und daher auch $\{\lambda^x: x \in G_1/H\}$ relativ kompakt in $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G_1/H)$ für alle $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G_1/H)$. Nach 4.8 besitzen die Lie-Gruppen G_1/H relativ kompakte adjungierte Gruppen, nach [19], 8.5 gilt $\vec{C}_k(G_1/H) = \vec{C}_k(G_1/H)$ für alle $H \in \mathcal{H}$. □

Die Voraussetzung von 4.9 (bzw. 3.6) ist insbesondere erfüllt, wenn G abelsch oder kompakt ist.

Es sollen nun die Beziehungen der Räume $C^k(G)$ und $C_k(G)$ zueinander betrachtet werden.

4.10 Proposition: Für alle $a \in A$ und $f^a \in C_1(G_a)$ ist $f := f^a \circ p_a$ aus $C_1(G_1)$, und für alle $X = (X^a)_{a \in A} \in \mathcal{L}(G)$ existiert $Xf = X(f^a \circ p_a)$ und ist gleich $(X^a f^a) \circ p_a$.

Beweis: Für $a \in A$ und f^a aus $C_1(G_a)$ ist die kanonische Abbildung p_a offen. Also ist $f^a \circ p_a$ aus $C_o(G_1)$. Nun existiert $X^a f^a$ für alle $X = (X^a)_{a \in A}$ aus $\mathcal{L}(G)$. Auf Grund der Surjektivität von p_a folgt etwa für die linksseitigen Ableitungen

$$\lim_{t \to o} \| \frac{1}{t} \{ L_{\exp_G tX} f - f \} - (\overleftarrow{X}^a f^a) \circ p_a \|_o$$
$$= \lim_{t \to o} \| \frac{1}{t} \{ f^a(\exp_{G_a} tX^a \cdot p_a(\cdot)) - f^a \circ p_a \} - (\overleftarrow{X}^a f^a) \circ p_a \|_o = o.$$

Also existiert $\overleftarrow{X} f$, insbesondere auch $\overleftarrow{X}_i f$ $(i \in I)$, und es gilt die behauptete Identität. I_a ist endlich. Wegen $\|f\|_1^{\leftarrow} = \|f^a\|_o + \sum_{i \in I_a} \|\overleftarrow{X}_i^a f^a\|_o = \|f^a\|_1^{\leftarrow}$ ist f aus $\overleftarrow{C}_1(G_1)$. □

4.11 Korollar: Sei $f \in C^k(G)$ $(k \in \mathbb{N})$. Für alle $j \leq k$ und $Y_1, \ldots, Y_j \in \mathcal{L}(G)$ existiert $(Y_1 \ldots Y_j) f$. Insbesondere gilt $C^k(G) \subseteq C_k(G)$.

Beweis: Mit den Bezeichnungen aus 4.5 existieren zu $f \in \overrightarrow{C}^k(G)$ Funktionen $f_z \in \overrightarrow{C}^k(G_1)$ $(z \in Z)$ mit $f = \bigoplus_{z \in Z} L_z f_z$. Es gilt $\overrightarrow{Y} f = \bigoplus_{z \in Z} \overrightarrow{Y}(L_z f_z) = \bigoplus_{z \in Z} L_z(\overrightarrow{Y} f_z)$ für alle $Y \in \mathcal{L}(G)$. Da $f_z \neq 0$ nur für endlich viele $z \in Z$ gilt, folgt die Behauptung mit Hilfe vollständiger Induktion aus 4.10, wenn man beachtet, daß die Vektorräume $\overrightarrow{C}^k(G)$ invariant bezüglich der L_x sind. □

Somit gilt $\mathcal{D}(G) \subseteq \overrightarrow{C}^k(G) \cap \overleftarrow{C}^k(G) \cap \mathcal{K}(G) \subseteq C^k(G) \subseteq C_k(G)$. Im allgemeinen gilt nicht $C^k(G) = C_k(G)$. Die Klasse derjenigen Funktionen aus $C_o(G)$, die k-fach gleichmäßig differenzierbar sind bezüglich aller Vektoren aus $\mathcal{L}(G)$, ist im allgemeinen echt größer als $C^k(G)$. Beispiele dazu werden in Paragraph 5 angegeben.

Bereits in [4] wird gezeigt, daß $\mathcal{D}(G)$ ein dichter linearer Teilraum von $\mathcal{K}(G)$ und daher von $(C_k(G), \|\cdot\|_o)$ ist. Diese Aussage wird jetzt dahingehend verschärft, daß $\mathcal{D}(G)$ dicht in $(C_k(G), \|\cdot\|_k)$ liegt ($k \in \mathbb{N}$). Wesentlich dafür ist die in 4.3 d) festgestellte Beziehung zwischen Differentiation und Faltung. Vorbereitend wird die Inklusion $\mathcal{K}(G) * \mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{D}(G)$ gezeigt.

4.12 Lemma: Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Für alle f aus $\mathcal{K}(G)$ und $g \in \mathcal{D}(G)$ ist $f*g \in \mathcal{D}(G)$.

Beweis: α) Seien G eine Lie-Gruppe und $f: G \to \mathbb{R}$ meßbar, beschränkt und mit kompaktem Träger. Für alle $g \in \mathcal{D}(G)$ ist dann $f*g \in \mathcal{D}(G)$.

⌈Nach den Voraussetzungen sind $f \in L_1(\omega)$ und $g \in \overrightarrow{C}_k(G)$ ($k \in \mathbb{N}$). Nach 4.3 d) ist $f*g \in \overrightarrow{C}_k(G)$. Wegen $\operatorname{supp}(f*g) \subseteq (\operatorname{supp} f)(\operatorname{supp} g)$ gilt $f*g \in \mathcal{K}(G)$. Nach 3.5 ist daher $f*g$ aus $\overrightarrow{C}_k(G) \cap \overleftarrow{C}_k(G)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und daher aus $\mathcal{D}(G)$. ⌋

β) Aussage α) gilt für jede Lie-projektive Gruppe G.

⌈Zu $g \in \mathcal{D}(G)$ existieren ein $a \in A$ und ein $g^a \in \mathcal{D}(G_a)$ mit $g = g^a \circ p_a$. Es gilt $f*g = h^a \circ p_a$, wobei $h^a: G_a \to \mathbb{R}$ die Abbildung $x_a \mapsto \int f(y)\, g^a(y_a^{-1} x_a)\, \omega(dy)$ ist. h^a besitzt den kompakten Träger $(p_a(\operatorname{supp} f))(\operatorname{supp} g^a)$. Aus $g^a \in \mathcal{D}(G_a) \subseteq \overrightarrow{C}_1(G_a)$ folgt $h^a \in \overrightarrow{C}_1(G_a)$, für $X^a \in \mathcal{L}(G_a)$ gilt $X^a h^a(x_a) = \int f(y)\, X^a g^a(y_a^{-1} x_a)\, \omega(dy)$. Durch Induktion zeigt man, daß h^a aus $\overrightarrow{C}_k(G_a)$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Wiederum aus 3.5 folgt $h^a \in \mathcal{D}(G_a)$. Dies war zu zeigen. ⌋

γ) Es sei nun G eine beliebige lokalkompakte Gruppe. $\mathcal{D}(G)$ ist ein Vektorraum, und für alle $x \in G$ gilt $R_x(\mathcal{D}(G)) \subseteq \mathcal{D}(G)$. Es ist g aus $\mathcal{D}(G)$, falls es ein Repräsentantensystem von Linksnebenklassen von G_1 und eine Familie $(g_z)_{z\in Z}$ aus $\mathcal{D}(G_1)$ gibt mit $g = \bigoplus_{z\in Z} R_z g_z$.
Für $f \in \mathcal{K}(G)$ gilt auf Grund dieser Darstellung

$$f*g = \bigoplus_{z\in Z} f*(R_z g_z \oplus 0) = \bigoplus_{z\in Z} R_z(f*(g_z \oplus 0)).$$

Es ist also nur noch folgende Aussage zu zeigen:
Für $g\in\mathcal{D}(G_1)$ und $f\in\mathcal{K}(G)$ ist $f*(g\oplus 0)\in\mathcal{D}(G)$.
⌈Da G_1 offen in G ist, existieren $x_1,\dots,x_d \in G$, so daß $\{x_iG_1: i = 1,\dots,d\}$ eine offene disjunkte Überdeckung von supp f ist. Für $i = 1,\dots,d$ ist $f_i := \mathrm{Res}(G_1, L_{x_i} f)$ meßbar, beschränkt und mit in G_1 kompaktem Träger $(L_{x_i}\,\mathrm{supp}\, f)\cap G_1$. Nach γ) ist $h_i := f_i * g \in \mathcal{D}(G_1)$. Dabei erfolgt die Faltung bezüglich dem auf G_1 eingeschränkten Haarmaß ω von G. Für $x \in G$ gilt nun

$$f*g(x) = \int_{\mathrm{supp}\, f} f(y)g(y^{-1}x)\omega(dy) = \sum_{i=1}^{d} \int_{x_iG_1} f(y)g(y^{-1}x)\,\omega(dy)$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \int_{G_1} L_{x_i}{}^{-1} f(y)\; g(y^{-1}x_i x)\omega(dy) = \bigoplus_{i=1}^{d} (L_{x_i} h_i)(x),$$

wobei die Träger der $L_{x_i} h_i$ gerade die disjunkten Nebenklassen $x_i^{-1}G_1$ sind (i=1,..,d).
Damit ist auch der Beweis des Lemmas abgeschlossen. ⌋ □

Das folgende Lemma ist eine geringfügige Modifikation von [19], 1.7. Der Beweis wird daher nur kurz skizziert.

4.13 Lemma: Seien $\mathcal{K}$ die Familie der kompakten Teilmengen von G und $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Familie $(f_K)_{K \in \mathcal{K}}$ aus $\mathcal{D}(G)_+$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Für alle $K \in \mathcal{K}$ gelten $f_K(K) \subseteq \{1\}$ und $\|f_K\|_o = 1$.

b) $\sup_{K \in \mathcal{K}} \|f_K\|_k$ ist endlich.

Beweis: Sei $f_o \in \mathcal{D}(G)_+$ mit $f_o(e) > o$ so gewählt, daß $f_o = f_o^*$ und $\|f\|_{L_1} = 1$ gelten. Es sei $K_o := \operatorname{supp} f_o$. Schließlich sei $(g_K)_{K \in \mathcal{K}}$ ein Netz in $\mathcal{D}(G)_+$, welches gegen 1_G aufsteigt und $g_K(K_o K K_o) \subseteq \{1\}$ für alle $K \in \mathcal{K}$ erfüllt. Nun setze man $f_K := f_o * g_K * f_o$ für $K \in \mathcal{K}$.

Nach 4.12 ist $f_K \in \mathcal{D}(G)_+$. Aus 3.7 d) folgt durch Induktion, daß $\overleftarrow{X}_\alpha f_K = \overleftarrow{X}_\alpha f_o * g_K * f_o$ und $\overrightarrow{X}_\alpha f_K = f_o * g_K * \overrightarrow{X}_\alpha f_o$ für alle $j \leq k$, $\alpha \in I^j$ und $X_{\alpha_i} \in \mathcal{L}(G)$ $(i = 1, \ldots, j)$ gelten. Man erhält die Abschätzung $\|X_\alpha f_K\|_o \leq \|X_\alpha f_o\|_o \, \omega(K_o)$ und daher $\sup_{K \in \mathcal{K}} \|f_K\|_k \leq 1 + \|f_o\|_k \, \omega(K_o)$. Die übrigen Eigenschaften sind in [19], 1.7 nachgewiesen. □

Nun kann der angekündigte Satz über die Dichtheit von $\mathcal{D}(G)$ in $(C_k(G), \|\cdot\|_k)$ bewiesen werden.

4.14 Satz: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ liegt $\mathcal{D}(G)$ dicht in $(C_k(G), \|\cdot\|_k)$.

Beweis: Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Eine Vorbereitung ist dazu notwendig.

α) Seien $k \in \mathbb{N}$, $f \in C_k(G)$ und $j \leq k$.

a) Für alle $\varepsilon > o$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}(G)$ mit

$$\sum_{\alpha \in I^j} \sup_{y \in U} \|X_\alpha f - R_y X_\alpha f\|_o < \varepsilon.$$

b) $\sum_{\alpha \in I^j}$ $|X_\alpha f|$ ist aus $C_o(G)$.

c) Zu $\varepsilon > o$ existiert eine kompakte Menge K aus G mit

$$\sum_{\alpha \in I^j} \sup_{x \notin K^\circ} |X_\alpha f(x)| < \varepsilon.$$

⌈Nach Voraussetzung existiert ein $J \in \mathfrak{F}(I^j)$ mit $\sum_{\alpha \notin J} \|X_\alpha f\|_o < \varepsilon$. Alle Aussagen gelten aber für die endlich vielen Funktionen $X_\alpha f$, $\alpha \in J$. ⌋

β) $\mathcal{D}(G)$ ist dicht in $C_k(G) \cap \mathcal{K}(G)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_k$.

⌈Ist $\{U_b : b \in B\}$ die durch die Inklusion geordnete absteigend filtrierende Familie symmetrischer Umgebungen von e, so existiert zu $b \in B$ ein $g_b \in \mathcal{D}(G)_+$ mit $\|g_b^*\|_{L_1} = 1$ und $U_b \supseteq \operatorname{supp} g_b$ ([4], 1. Prop. 2). Ist nun $f \in C_k(G) \cap \mathcal{K}(G)$, so ist $f * g_b \in \mathcal{D}(G)$ nach 4.12, und nach 3.7 d) erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|f - f*g_b\|_k &\le \sup_{x \in G} \int |f(x) - f(xy)| g_b(y^{-1}) \omega(dy) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha \in I^j} \sup_{x \in G} \int |X_\alpha f(x) - X_\alpha f(xy)| g_b(y^{-1}) \omega(dy) \\ &\le \sup_{y \in U_b} \|f - R_y f\|_o + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha \in I^j} \sup_{y \in U_b} \|X_\alpha f - R_y X_\alpha f\|_o\end{aligned}$$

Beide Summanden des letzten Ausdrucks gehen aber nach α) für $b \in B$ gegen o. ⌋

γ) $C_k(G) \cap \mathcal{K}(G)$ ist dicht in $(C_k(G), \|\cdot\|_k)$.

⌈Seien f aus $C_k(G)$ und $(f_K)_{K \in \mathfrak{K}}$ das in 4.13 konstruierte gegen 1_G aufsteigende Netz aus $\mathcal{D}(G)_+$. Nach 4.2 ist $f \cdot f_K$ aus $C_k(G) \cap \mathcal{K}(G)$. Nach 3.7 c) ist $X_\alpha f_K(x) = 0$ für x aus dem Inneren $\mathring{K}$ von K für $K \in \mathfrak{K}$, $j \le k$, $\alpha \in I^j$ und $X_{\alpha_i} \in \mathcal{L}(G)$ $(i = 1, .., j)$. Für $C := \sum_{i=1}^{k} 2^i$ gilt daher

$$\|f - f\cdot f_K\|_k$$

$$\leq \sup_{x\notin K}|f(x) - f(x)f_K(x)| + \sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha\in I^j}\sup_{x\in G}|X_\alpha f(x) - X_\alpha(f\cdot f_K)(x)|$$

$$\leq 2\sup_{x\notin K}|f(x)| + \sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha\in I^j}\sup_{x\notin K}|X_\alpha f(x)|$$

$$+ C\,\|f_K\|_k \sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha\in I^j}\sup_{x\notin K}|X_\alpha f(x)|.$$

Die drei Summanden des letzten Ausdrucks gehen aber gegen o, falls K gegen G aufsteigt. ⌋□

Nach Korollar 4.11 ist eine C^k-Funktion gleichmäßig differenzierbar bezüglich jedem Vektor aus $\mathcal{L}(G)$. Für C_k-Funktionen hat man eine solche Aussage nach 3.8 bisher nur für Vektoren aus der linearen Hülle der Basis $(X_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{L}(G)$. Aus 4.14 folgt eine darüberhinausgehende Aussage.

4.15 Korollar: Seien $f\in C_1(G)$ und $r = (r_i)_{i\in I}\in \mathbb{R}^I$ mit $\sup_{i\in I}|r_i| < \infty$ gegeben. Dann existieren $X := \sum_{i\in I} r_i X_i$ in $\mathcal{L}(G)$, Xf und $\|\cdot\|_o\text{-}\lim_{J\in\mathfrak{F}(I)}\sum_{i\in J} r_i(X_i f)$, und es gilt $Xf = (\sum_{i\in I} r_i X_i)f = \sum_{i\in I} r_i(X_i f)$.

Beweis: X existiert nach 2.5. Nach 4.10 konvergiert $X_J f := \sum_{i\in J} r_i X_i f$ für $J\in\mathfrak{F}(I)$ gegen Xf für alle $f\in C^1(G)$. Für $f\in C_1(G)$ gilt aber $\|X_J f\|_o \leq \sum_{i\in J}|r_i|\,\|X_i f\|_o \leq \{\sup_{i\in I}|r_i|\}\,\|f\|_1$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist daher $(X_J f)_{J\in\mathfrak{F}(I)}$ für jedes $f\in C_1(G)$ konvergent. Die Behauptung folgt damit aus der Abgeschlossenheit des Ableitungsoperators nach 3.9. □

Abschließend sollen Koordinatensysteme für lokalkompakte Gruppen betrachtet werden. Sind G eine Lie-Gruppe der Dimension d und $(X_i)_{i=1,..,d}$ eine Basis von $\mathcal{L}(G)$, so existiert bekanntlich ein kanonisches Koordinatensystem $(x_i)_{i=1,..,d}$ von G in e bezüglich $(X_i)_{i=1,..,d}$. Die Funktionen $x_1,...,x_d$ haben folgende Eigenschaften:

a) $x \mapsto (x_1(x),..,x_d(x))$ ist ein Homöomorphismus einer Umgebung von e in G auf eine Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^d$.

b) Es existiert eine Umgebung V von 0 in $\mathcal{L}(G)$, so daß $x_i(\exp_G X) = t_i$ für $i = 1,...,d$ und $X \in V$ genau dann gilt, wenn X die Koordinatendarstellung $X = \sum_{i=1}^{d} t_i X_i$ besitzt. Insbesondere gilt $x_i(e) = 0$.

c) Wir haben $X_i x_j(e) = \delta_{ij}$ für $i,j \in \{1,..,d\}$; in diesem Sinn trennt $\{x_1,...,x_d\}$ also $\mathcal{L}(G)$.

d) Es gilt $x_i^* = -x_i$ für $i=1,...,d$.

Für die Gültigkeit der Eigenschaften a) und b) ist notwendigerweise $\exp_G$ ein lokaler Homöomorphismus. Dies ist bei beliebigen lokalkompakten Gruppen im allgemeinen jedoch nicht der Fall. Die Eigenschaften c) und d) aber, und nur diese werden in den Anwendungen dieser Arbeit benötigt, sind davon unabhängig.

4.16 Definition: Es seien G eine lokalkompakte Gruppe und $\mathfrak{X} = (X_i)_{i \in I}$ eine projektive Basis von $\mathcal{L}(G)$. Eine Familie $(k_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{D}(G)$ heißt schwaches Koordinatensystem von G (in e) (bezüglich $(X_i)_{i \in I}$), falls für $i,j \in I$ stets $X_i k_j(e) = \delta_{ij}$ und $k_i^* = -k_i$ gelten. k_i wird die i-te Koordinatenfunktion genannt.

Die Existenz eines schwachen Koordinatensystems folgt aus der Existenz einer projektiven Basis von $\mathcal{L}(G)$.

4.17 Lemma: Für $a \in A$ sei $(x_i^a)_{i \in I_a}$ ein kanonisches Koordinatensystem von G_a bezüglich der Basis $(X_i^a)_{i \in I_a}$ von $\mathcal{L}(G_a)$. Für jedes $i \in I$ wählen wir ein $a \in A$ mit $i \in I_a$ und setzen

$$k_i(x) := \begin{cases} x_i^a \circ p_a(x) & \text{für } x \in G_1 \\ o & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Für jede so getroffene Wahl ist $(k_i)_{i \in I}$ ein schwaches Koordinatensystem von G in e bezüglich der Basis $(X_i)_{i \in I}$.

b) Für je zwei so konstruierte schwache Koordinatensysteme $(k_i)_{i \in I}$ und $(l_i)_{i \in I}$ und für jedes $i \in I$ existiert eine Umgebung $U_i \in \mathcal{U}(G)$, auf der k_i und l_i über einstimmen.

Beweis: α) Für $i,j \in I$ und $j \in I_a$ ist $X_i k_j(e) = X_i^a(x_j^a)(e)$ gleich $O(x_j^a)(e) = o$ für $i \notin I_a$ und gleich δ_{ij} für $i \in I_a$ nach 4.10. Ferner ist $k_j^*(x) = (x_j^a \oplus O)(x^{-1})$ gleich O für $x \notin G_1$ und gleich $-x_j^a(x_a) = -k_j(x)$ für $x \in G_1$. Daher gilt Aussage a).

β) Für $a \in A$ sei $U_a \in \mathcal{U}(G_a)$ eine Umgebung, in die hinein $\exp_a$ homöomorph abbildet. Für $a,b \in A$ mit $a < b$, $x_b \in U_b$ und $i \in I_a$ gilt dann auf Grund der Eigenschaft b) der Koordinatenfunktionen

$$x_i^a \circ p_a^b(x_b) = x_i^a \left(\exp\Big(\sum_{j \in I_b} x_j^b(x_b)\, dp_a^b(X_j^b)\Big)\right)$$

$$= x_i^a \left(\exp\Big(\sum_{j \in I_a} x_j^b(x_b)\, X_j^a\Big)\right) = x_i^b(x_b).$$

Seien $i \in I_a \cap I_b$, $k_i := x_i^a \circ p_a$ und $l_i := x_i^b \circ p_b$. Nun existiert ein $c \in A$ mit $c > b$ und $c > a$. Ferner gibt es ein $V_c \in \mathcal{U}(G_c)$, so daß $x_i^a \circ p_a^c(x_c) = x_i^c(x_c) = x_i^b \circ p_b^c(x_c)$ für $x_c \in V_c$ gilt. Also stimmen $k_i = x_i^a \circ p_a^c \circ p_c$ und $l_i = x_i^b \circ p_b^c \circ p_c$ auf $p_c^{-1}(V_c)$ überein. Da p_c stetig ist und G_1 offen in G ist, gilt $p_c^{-1}(V_c) \in \mathcal{U}(G)$ und daher Aussage b). □

In Paragraph 7 wird es sich als hilfreich erweisen, normbeschränkte schwache Koordinatensysteme zur Verfügung zu haben. Dies bedeutet keine Einschränkung.

4.18 Korollar: Es existiert ein schwaches Koordinatensystem $(k_i)_{i \in I}$ von G in e bezüglich $(X_i)_{i \in I}$ mit $\|k_i\|_o \leq 1$ für alle $i \in I$.

Beweis: Für $a \in A$ sei $(x_i)_{i \in I_a}$ ein kanonisches Koordinatensystem von G_a in e bezüglich der Basis $(X_i^a)_{i \in I_a}$ von $\mathcal{L}(G_a)$. Es gibt ein $U \in \mathcal{U}(G_a)$ mit $|x_i(y)| \leq 1/2$ für alle $y \in U$ und $i \in I_a$. Nun existieren aber ein $V \in \mathcal{U}(G_a)$ mit $V \cdot V^{-1} \subseteq U$ und ein $g \in \mathcal{D}(G_a)_+$ mit supp $g \subseteq U$, $g(V) \subseteq \{1\}$ und $\|g\|_o \leq 1$. [Wähle V so, daß $\overline{V} \subseteq U$ gilt. Dann ist $\{U, \complement V\}$ offene Überdeckung von G_a, für jede Partition der Eins $\{g, g'\}$ in $\mathcal{D}(G_a)$ gilt supp $g \subseteq U$ und supp $g' \subseteq \complement V$, also $g(V) \subseteq \{1\}$ (vgl. [10], 1.)] Dann ist aber $(x_i \cdot g \cdot g^*)_{i \in I_a}$ Koordinatensystem von G in e mit $\|x_i \cdot g \cdot g^*\|_o \leq 1$ (vgl. 3.7 d)). Die Konstruktion von 4.17 definiert ein schwaches Koordinatensystem mit der gewünschten Eigenschaft. □

§ 5 Beispiele für kompakte abelsche Gruppen

Bei der Diskussion von Beispielen beschränken wir uns auf kompakte abelsche Gruppen. Es muß daher nicht zwischen rechts- und linksseitiger Ableitung unterschieden werden. Stetige und gleichmäßige Differenzierbarkeit sind nach 3.5 gleichwertig. Damit kann neben den Ergebnissen der Paragraphen 3 und 4 auch auf die Resultate von BOSECK [2] und EDAMATSU [7] zurückgegriffen werden.

In diesem Zusammenhang bezeichne $\mathcal{E}_k(G)$ den in diesen Arbeiten untersuchten Raum der Funktionen aus C(G), die k-mal stetig differenzierbar sind bezüglich aller Vektoren aus $\mathcal{L}(G)$ (vgl. 3.2 b)). Eine Funktion f aus C(G) ist aus $\mathcal{E}_k(G)$ genau dann, wenn es einen abgeschlossenen Normalteiler K von G gibt, so daß G/K endlich dimensional und separabel ist, und wenn f die Darstellung $f = f_K \circ p_K$ besitzt. Dabei sind f_K aus $\mathcal{E}_k(G/K)$ und $p_K: G \to G/K$ die kanonische Abbildung ([7], 3.1).

In diesem Paragraphen steht i ausschließlich für die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$.

5.1 Die unendlichdimensionale Torus-Gruppe $\mathbb{T}^I$

Die Torusgruppe $\mathbb{T}$ ist eine kompakte abelsche Lie-Gruppe. Es gilt $\mathcal{L}(\mathbb{T}) = \mathbb{R}$. Die Exponentialabbildung ist gegeben durch $\exp_{\mathbb{T}}(t) = e^{it}$ für alle t aus $\mathbb{R}$.

Für eine unendliche Menge I sei G das topologische direkte Produkt $\mathbb{T}^I$. Die Elemente von G werden mit $s := (e^{is_j})_{j \in I}$, $s_j \in \mathbb{R}$, bezeichnet. G ist eine (lokal) zusammenhängende

kompakte abelsche Gruppe. G ist metrisierbar genau dann, wenn I abzählbar ist. Da I unendlich ist, besitzt G kleine Untergruppen und ist daher keine Lie-Gruppe.

Für $J \in \mathfrak{F}(I)$ ist $H_J := \{1\}^J \times \mathbb{T}^{I \setminus J}$ ein kompakter Normalteiler von G und $G_J := G/H_J \cong \mathbb{T}^J$ eine Lie-Gruppe mit $\mathcal{L}(G_J) = \mathbb{R}^J$. Die Exponentialabbildung $\exp_J := \exp_{G_J} : \mathcal{L}(G_J) \to G_J$ ist definiert durch $\exp_J((r_j)_{j\in J}) = (e^{ir_j})_{j\in J}$ für r aus $\mathbb{R}^J$. Wegen $\bigcap_{J\in\mathfrak{F}(I)} H_J = \{1\}$ ist $\{H_J : J \in \mathfrak{F}(I)\}$ ein Lie-System zu G, welches nur für abzählbares I absteigend gewählt werden kann.

Für alle K und J aus $\mathfrak{F}(I)$ mit $K \subseteq J$ und alle $s \in G$ gilt $p_K^J((e^{is_j})_{j\in J}) = (e^{is_j})_{j\in K} = p_K((e^{is_j})_{j\in I})$. Für $(r_j)_{j\in J}$ aus $\mathcal{L}(G_J)$ erhalten wir

$\exp_K dp_K^J((r_j)_{j\in J}) = p_K^J(\exp_J((r_j)_{j\in J})) = p_K^J((e^{ir_j})_{j\in J})$
$= (e^{ir_j})_{j\in K} = \exp_K((r_j)_{j\in K})$.

Die Abbildungen dp_K^J sind die kanonischen Abbildungen von $\mathbb{R}^J$ auf $\mathbb{R}^K$. Es gilt $\mathcal{L}(G) := \varprojlim_{J\in\mathfrak{F}(I)} \mathcal{L}(G_J) = \mathbb{R}^I$ bezüglich dem projektiven System $(\mathfrak{F}(I), \mathcal{L}(G_J), dp_K^J)$. Für $K \in \mathfrak{F}(I)$ sind die kanonischen Abbildungen $dp_K : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G_K)$ gerade die Projektionen auf die Koordinaten aus K. Daher ist die Familie $(X_k)_{k\in I} := ((\delta_{kj})_{j\in I})_{k\in I}$ eine projektive Basis von $\mathcal{L}(G)$.

5.2 Differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{T}^I$

Auf Grund der Definition sind C^1-Funktionen auf $G = \mathbb{T}^I$ genau solche Funktionen, die nur von endlich vielen Koordinaten der Darstellung von G als projektivem Limes differenzierbar abhängen. Auf der anderen Seite sind für Funktionen aus $C_1(G)$

die Ableitungen bezüglich höchstens abzählbar vieler Vektoren der Basis von $\mathcal{L}(G)$ von Null verschieden (vgl. 4.3 b)). In diesem Fall hängen die C_k-Funktionen von höchstens abzählbar vielen Koordinaten von $G = \mathbb{T}^I$ ab.

Sind also $\{j_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Teilmenge von I und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge aus $\mathbb{R}$, so definiert etwa $f(s) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos s_{j_n}$ eine Funktion f aus $C_1(G) \setminus C^1(G)$. Es gilt nämlich $X_k f(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{k,j_n}(-a_n) \sin s_{j_n}$ für alle $k \in I$ und $s \in G$. Nach 3.5 existiert $X_k f$ gleichmäßig, und $\|f\|_1 = \|f\|_o + \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty$ impliziert $f \in C_1(G)$.

Da G lokal zusammenhängend ist, stimmen die Räume $\mathcal{E}_k(G)$ und $C^k(G)$ überein ([7], Kor. zu Prop. 3.2). Es gilt also $C^k(G) = \mathcal{E}_k(G) \subsetneq C_k(G)$ $(k \in \mathbb{N})$.

Wir geben die in Paragraph 3 angekündigten Beispiele dafür an, daß der Ableitungsoperator $(X,f) \mapsto Xf$ in keiner Variablen stetig ist. Dazu sei I als abzählbar vorausgesetzt.

α) Für $k \in \mathbb{N}$ und $s \in G$ sei $f_k(s) := \frac{1}{k}\cos(ks_1)$. Es gelten dann $\|\cdot\|_o\text{-}\lim_{k\in\mathbb{N}} f_k = 0$ und $X_j f_k(s) = -\delta_{j1}\sin(ks_1)$ $(j \in I)$. Also sind die Funktionen f_k aus $C_1(G)$ $(k \in \mathbb{N})$. Es gilt $X_1(\lim_{k\in\mathbb{N}} f_k) = 0$, aber $(X_1 f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht .

β) Für $k \in \mathbb{N}$ sei nun $Y_k := (1,..,1,k^3,k^3,...) \in \mathbb{R}^I = \mathcal{L}(G)$, wobei k^3 das erste Mal an der k-ten Stelle erscheint. f sei wie oben bezüglich der Familie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (1/n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Dann konvergiert $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(G)$ gegen $Y = (1,1,...)$, es existieren $Y_k f$ und Yf nach 4.15. Aber für $s := (e^{i\pi/2})_{j\in I}$ und $k > 1$ gilt $|Y_k f(s) - Yf(s)| \geq (k^3 - 1)/k^2$. Somit konvergiert $Y_k f$ nicht gegen Yf.

5.3 Das p-adische Solenoid

Es bezeichne $\mathbb{Q}_d$ die mit der diskteten Topologie versehene additive Gruppe der rationalen Zahlen. Da $\mathbb{Q}_d$ abelsch und diskret ist, ist die Charaktergruppe $\Sigma := \hat{\mathbb{Q}}_d := \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_d, \mathbb{T})$ von $\mathbb{Q}_d$ abelsch und kompakt. Σ ist ein p-adisches Solenoid, metrisierbar und zusammenhängend und enthält eine dichte Einparameter-Untergruppe λ ([12], 10.13).

Σ ist keine Lie-Gruppe. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Charaktergruppe $\hat{\Sigma}$ von Σ. Nach dem Dualitätssatz von Pontryagin haben wir $\mathbb{Q}_d = \hat{\Sigma} =: \{\hat{\chi}_q : q \in \mathbb{Q}\}$ mit $\hat{\chi}_q(\chi) = \chi(q)$ für alle $\chi \in \Sigma$ und $q \in \mathbb{Q}$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei N_k der Annihilator $A(\Sigma, \{\hat{\chi}_{1/k!}\}) := \{\chi \in \Sigma : \hat{\chi}_{1/k!}(\chi) = 1\}$ von $\{\hat{\chi}_{1/k!}\}$ in Σ. Es gilt $N_k \neq \{e\}$ und $N_k = A(\Sigma, \{\hat{\chi}_{z/k!} : z \in \mathbb{Z}\})$ und daher $N_k \supseteq N_{k+1}$ für $k \in \mathbb{N}$. Nach [12], 23.24 ist N_k abgeschlossen in Σ, also kompakt. Der Satz von Gel'fand-Raikov liefert $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} N_k = \{\chi \in \Sigma : \hat{\chi}(\chi) = 1 \text{ für alle } \hat{\chi} \in \hat{\Sigma}\} = \{e\}$ ([12], 22.12).

Das soeben konstruierte System der N_k ($k \in \mathbb{N}$) bildet sogar ein Lie-System für Σ. Für den Annihilator $A(\hat{\Sigma}, N_k)$ von N_k in $\hat{\Sigma}$ gilt nämlich $(\Sigma/N_k)^{\wedge} \cong A(\hat{\Sigma}, N_k) \cong \mathbb{Z}/k! \cong \mathbb{Z}$ und daher $\Sigma/N_k \cong \hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$. Den kanonischen Abbildungen $p_k : \Sigma \to \Sigma/N_k$ entsprechen die Charaktere $\hat{\chi}_{1/k!}$. Nun rechnet man leicht nach, daß für $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ die kanonische Abbildung $p_m^n : \Sigma/N_n \to \Sigma/N_m$ gegeben ist durch $p_m^n(s) = s^{n!/m!}$ ($s \in \Sigma/N_n \cong \mathbb{T}$). Somit ist Σ topologisch isomorph zu $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{T}$ bezüglich dem System $(\mathbb{N}, \mathbb{T}, p_m^n)$ ([12], 25.3).

Für die Differentiale $dp_m^n: \mathcal{L}(\Sigma/N_n) \cong \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cong \mathcal{L}(\Sigma/N_m)$ gilt $\exp_{\mathbb{T}}(dp_m^n(s)) = p_m^n(e^{is}) = e^{isn!/m!} = \exp_{\mathbb{T}}(sn!/m!)$ und daher $dp_m^n(s) = sn!/m!$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Nach Definition ist die Lie-Algebra von Σ gegeben durch $\mathcal{L}(\Sigma) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}(\Sigma/N_n) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ bezüglich dem System $(\mathbb{N},\mathbb{R},dp_m^n)$. Für $n \geq m$ sind die Abbildungen dp_m^n Isomorphismen von $\mathbb{R}$, daher gilt $\mathcal{L}(\Sigma) \cong \mathbb{R}$. Auch die kanonischen Abbildungen $dp_n: \mathcal{L}(\Sigma) \to \mathcal{L}(\Sigma/N_n)$ sind Isomorphismen. Daher bildet jedes Element aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine projektive Basis von $\mathcal{L}(\Sigma)$. Die Exponentialabbildung $\exp_\Sigma: \mathbb{R} \to \Sigma$ mit $\exp_\Sigma(s) = (e^{is/n!})_{n\in\mathbb{N}}$ ist gerade eine Parametrisierung der einen Einparameter-Untergruppe λ von Σ (vgl. auch [2], Beispiel 1.1).

5.4 Differenzierbare Funktionen auf Σ

Auf Grund der Eindimensionalität von $\mathcal{L}(\Sigma)$ gilt offensichtlich $C_k(\Sigma) = \mathcal{E}_k(\Sigma)$. Im Gegensatz zum ersten Beispiel haben wir aber $\mathcal{E}_k(\Sigma) \not\supseteq C^k(\Sigma)$ für $k \in \mathbb{N}$. Man bemerkt nämlich sofort, daß jedes $f \in C^k(\Sigma)$ auf einer der in 5.3 vorgestellten abgeschlossenen Untergruppen N_k invariant ist (vgl. dazu 1.7). Wie in [2], Beispiel 4.2 zeigt man nun, daß $f \circ \lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion sein muß. Setzen wir $g(\chi) := \mathrm{Re}(\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-2}\, \hat{\chi}_{1/n}(\chi))$ für $\chi \in \Sigma$, so ist $g \circ \lambda$ keine periodische Funktion auf Σ, aber beliebig oft differenzierbar. Somit gilt $g \in \mathcal{E}_k(\Sigma) \setminus C^k(\Sigma)$ für $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere folgt daraus, daß Σ nicht lokal zusammenhängend ist ([7], 3.2 Cor.).

II Hemigruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Die Ergebnisse des ersten Kapitels sollen zur Untersuchung von Problemen aus der Theorie der Faltungshemigruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen herangezogen werden. Die zum Verständnis notwendigen Begriffe und Aussagen sind in Paragraph 6 zusammengestellt (vgl. hierzu auch [13], [14]). Der Paragraph 7 ist einer Ausdehnung des Satzes von **Hunt** auf beliebige lokalkompakte Gruppen gewidmet. Die Charakterisierung und Erzeugung von Hemigruppen von beschränkter Variation mit Hilfe der Evolutionsgleichungen wird in den Paragraphen 8 und 9 diskutiert. Auf dem Beispiel eines additiven Prozesses basiert ein Ergebnis aus der Störungstheorie von Faltungshemigruppen, welches abschließend in Paragraph 10 vorgestellt wird.

In diesem Kapitel seien G eine lokalkompakte Gruppe und G_1 eine Lie-projektive offene Untergruppe von G. Zudem sei $\mathcal{H} = \{H_a : a \in A\}$ ein Lie-System von G_1, für welches eine projektive Basis $\mathcal{X} = (X_i)_{i \in I}$ von $\mathcal{L}(G)$ existiert.

§ 6 Faltungshemigruppen und Faltungshalbgruppen

Als Verallgemeinerung der Faltungshalbgruppen steht der Begriff der Faltungshemigruppe im Zentrum dieses Paragraphen.

6.1 Definition: Ein Familie $(\mu(s,t))_{(s,t) \in D}$ in $\mathcal{M}^1(G)$ heißt Faltungshemigruppe (von Wahrscheinlichkeitsmaßen), falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

(H1) Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt $\mu(t,t) = \varepsilon_e$.

(H2) Die Abbildung $(s,t) \mapsto \mu(s,t)$ von D in $\mathcal{M}^1(G)$ ist stetig bzgl. der schwachen Topologie in $\mathcal{M}^1(G)$.

(H3) Für je zwei $(r,s), (s,t) \in D$ gilt

$\mu(s,t) * \mu(r,s) = \mu(r,t)$.

Gilt zusätzlich für $(s,t) \in D$ und $h \in \mathbb{R}_+$ die Identität $\mu(s,t) = \mu(s+h,t+h)$, so wird $(\mu(o,t))_{t\geq o}$ Faltungshalbgruppe (von W-Maßen) genannt und mit $(\mu(t))_{t\geq o}$ bezeichnet.

Der Begriff der Faltungshemigruppe tritt in natürlicher Weise bei der Untersuchung additiver Prozesse mit Werten in einer lokalkompakten Gruppe auf.

6.2 Definition: Sei $(\Omega,\mathcal{A},W)$ ein W-Raum. Ein stochastischer Prozeß $\Psi = (\Psi_t)_{t\geq o}$ mit Werten in G heißt additiver Prozeß, falls er folgende Eigenschaften besitzt:

(A1) Es gilt $\Psi_o = e$ W-fast sicher.

(A2) Ψ ist stochastisch stetig in dem Sinn, daß

$\lim_{t-s\downarrow o} W([\Psi_t \Psi_s^{-1} \notin U]) = 0$ für alle $U \in \mathcal{U}(G)$ gilt.

(A3) Ψ besitzt unabhängige (Rechts-)Zuwächse, d. h., für jede endliche aufsteigende Familie $(t_i)_{i=1,..,n}$ in $\mathbb{R}_+$ sind die Zufallsvariablen $(\Psi_{t_{i+1}} \Psi_{t_i}^{-1})_{i=1,..,n-1}$ unabhängig.

Ist zudem für alle $(s,t) \in D$ und $h \in \mathbb{R}_+$ die Gleichung $\Psi_t \Psi_s^{-1}(W) = \Psi_{t+h} \Psi_{s+h}^{-1}(W)$ erfüllt, so heißt Ψ stationärer additiver Prozeß.

6.3 Bemerkung: Ein additiver Prozeß mit Werten in einer lokalkompakten Gruppe mit abzählbarer Basis besitzt eine Modifikation mit rechtsseitig stetigen Pfaden, die in jedem Punkt einen linksseitigen Limes besitzen ([14], 5.1).

Die Verteilungen $(\Psi_t \Psi_s^{-1}(W))_{(s,t)\in D}$ der rechtsseitigen Zuwächse eines additiven Prozesses bilden offensichtlich eine Faltungshemigruppe. Im Fall einer polnischen Gruppe ist diese Beziehung sogar eineindeutig. Die stationären additiven Prozesse sind den Faltungshalbgruppen zugeordnet.

In den bisher erwähnten Arbeiten erfüllt eine Faltungshemigruppe statt der Bedingung (H3) die Gleichung $\mu(r,s) * \mu(s,t) = \mu(r,t)$ für alle $(r,s), (s,t) \in D$. Im Hinblick auf die Anwendung der Arbeit [11] in Paragraph 8 weichen wir hier von dieser Forderung ab. Für jede Hemigruppe $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ erfüllt aber die Familie $(\tilde{\mu}(s,t))_{(s,t)\in D}$ die genannte Gleichung. Ist $(\Psi_t)_{t\geq 0}$ ein Prozeß mit unabhängigen rechtsseitigen Zuwächsen, so ist $(\Psi_t^{-1})_{t\geq 0}$ ein solcher mit unabhängigen linkkseitigen Zuwächsen. $(\Psi_t^{-1}\Psi_s(W))^{\sim}_{(s,t)\in D}$ genügt wieder der zuletzt genannten Gleichung.

Viele Eigenschaften von Faltungshemigruppen spiegeln sich in den von ihnen erzeugten Evolutionsfamilien wieder.

6.4 Definition: Eine Familie $T := (T(s,t))_{(s,t)\in D}$ von Kontraktionen auf $C_o(G)$ heißt Evolutionsfamilie, falls

folgende Bedingungen erfüllt sind:

(E1) Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ ist $T(t,t)$ die Identität auf $C_o(G)$.

(E2) Für jedes $f \in C_o(G)$ gilt $\lim_{t-s \downarrow o} \|T(s,t)f - f\|_o = 0$.

(E3) Für je zwei (r,s), $(s,t) \in D$ gilt

$$T(s,t)\, T(r,s) = T(r,t).$$

Ist zudem für alle $(s,t) \in D$ und $h \in \mathbb{R}_+$ die Gleichung $T(s,t) = T(s+h,t+h)$ erfüllt, so wird die Familie $(T(o,t))_{t \geq o}$ Kontraktionshalbgruppe genannt und mit $(T(t))_{t \geq o}$ bezeichnet.

Die Gleichung in (E3) ist der entsprechenden Gleichung in (H3) angepaßt, denn Hemigruppen definieren die hier ausschließlich untersuchten Evolutionsfamilien.

6.5 Bemerkung: Zu jedem additiven Prozeß $\Psi = (\Psi_t)_{t \geq o}$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, W)$ mit Werten in G gehört eine Faltungshemigruppe $(\Psi_t \Psi_s^{-1}(W))_{(s,t) \in D}$ auf G. Zu jeder Faltungshemigruppe $(\mu(s,t))_{(s,t) \in D}$ auf G gehört eine Evolutionsfamilie $(T_{\mu(s,t)})_{(s,t) \in D}$ auf $C_o(G)$. Die Faltungshemigruppe eines stationären additiven Prozesses ist eine Faltungshalbgruppe, die Evolutionsfamilie einer Faltungshalbgruppe eine Kontraktionshalbgruppe.

Im Rahmen der Untersuchung von Faltungshalbgruppen und Kontraktionshalbgruppen haben die Begriffe des erzeugenden Funktionals und des infinitesimalen Generators eine zentrale Bedeutung.

6.6 Definition: a) Für eine Faltungshalbgruppe $(\mu(t))_{t\geq 0}$ auf G bezeichne D(A) die Menge der $f \in C_0(G)$, für die $A(f) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \{\int f d\mu(h) - f(e)\}$ existiert. Das so definierte lineare Funktional A mit Definitionsbereich D(A) heißt das erzeugende Funktional von $(\mu(t))_{t\geq 0}$.

b) Für eine Kontraktionshalbgruppe T auf $C_0(G)$ bezeichne D(N) die Menge der $f \in C_0(G)$, für die $Nf := \|\cdot\|_0\text{-}\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \{T(h)f - f\}$ existiert. Der so definierte lineare Operator N mit Definitionsbereich D(N) heißt der (infinitesimale) Generator von T.

6.7 Bemerkung: Seien $(\mu(t))_{t\geq 0}$ eine Faltungshalbgruppe auf G mit erzeugendem Funktional (A,D(A)) und T die zugehörige Kontraktionshalbgruppe mit Generator (N,D(N)). Dann wird N auch der zu $(\mu(t))_{t\geq 0}$ gehörende (infinitesimale) Generator genannt. Es gilt $L_x(D(N)) \subseteq D(N) \subseteq D(A)$ für alle $x \in G$. Ferner haben wir $Nf(e) = A(f)$ sowie $NL_x = L_x N$ und daher $Nf(x) = A(L_x f)$ für alle $x \in G$ und $f \in D(N)$ (vgl. 4.3 e) sowie [13], 4.1).

Eine beliebige Evolutionsfamilie T und eine Generatorfamilie $N = (N(t))_{t\geq 0}$ lassen sich in natürlicher Weise auf mehrere Arten einander zuordnen. Ist die Abbildung $(s,t) \mapsto T(s,t)f$ für alle f aus einer geeigneten Teilmenge von $C_0(G)$ im starken Sinn partiell einseitig differenzierbar, so setzen wir $\frac{\partial^+}{\partial t} T(s,t)f\Big|_{t=s} := N(s)f$. Es gilt dann die

Kolmogoroffsche Vorwärtsdifferentialgleichung
$\frac{\partial^+}{\partial t} T(s,t)f = N(t)T(s,t)f$ für alle $(s,t) \in D$. Analog kann man man N(t) definieren durch $\frac{\partial^-}{\partial s} T(s,t)f\Big|_{t=s}$ und erhält die Kolmogoroffsche Rückwärtsdifferentialgleichung
$\frac{\partial^-}{\partial s} T(s,t)f = T(s,t)N(s)f$. Üblicherweise betrachtet man aber die Zuordnung von T und N durch beide Differentialgleichungen. Es muß dazu $N(t)f := \frac{\partial^+}{\partial t} T(s,t)f\Big|_{t=s} = -\frac{\partial^-}{\partial s} T(s,t)f\Big|_{t=s}$ für alle $(s,t) \in D$ gelten. In diesem Fall lauten die Kolmogoroffschen Differentialgleichungen $\frac{\partial^+}{\partial t} T(s,t)f = N(t)T(s,t)f$ und $\frac{\partial^-}{\partial s} T(s,t)f = -T(s,t)N(s)f$. Dabei ist f wieder jeweils aus einer geeignet zu wählenden Teilmenge von $C_o(G)$. Die Reihenfolge der Operatoren ist wieder durch (E3) festgelegt.

Unter schwächeren Voraussetzungen an T und stärkeren Voraussetzungen an N kann eine Zuordnung von N und T durch die integrierten Kolmogoroffschen Differentialgleichungen
$T(s,t)f - f = \int_s^t N(u)T(s,u)f\,du$ oder
$T(s,t)f - f = \int_s^t T(u,t)N(u)f\,du$ erreicht werden. Diese Gleichungen sollen Evolutionsgleichungen genannt werden, die erste Vorwärts- und die zweite Rückwärtsevolutionsgleichung. Mit Hilfe der Evolutionsgleichungen kann in Paragraph 9 eine auf [14] basierende Erzeugung von Hemigruppen auf G angegeben werden.

Faßt man in den Evolutionsgleichungen die Integrale als operatorwertige Riemann-Stieltjes-Integrale bezüglich der additiven Intervallfunktion M(du):= N(u)du auf, so erhält man $T(s,t) - 1 = \int_s^t M(du)T(s,u)$ und $T(s,t) - 1 = \int_s^t T(u,t)M(du)$. In dieser Form sollen die Evolutionsgleichungen in Paragraph 8

für die Charakterisierung von Faltungshemigruppen von beschränkter Variation herangezogen werden.

Die Evolutionsfamilie einer Faltungshemigruppe auf G kann man auch einer Familie von erzeugenden Funktionalen zuzuordnen versuchen. Hier bieten sich prinzipiell wieder die bisher dargestellten Möglichkeiten an, die nun jedoch im schwachen Sinn, also bei punktweiser Auswertung in e, verstanden werden müssen (vgl. [19]). Eine noch schwächere Zuordnung kann über das Martingalproblem vorgenommen werden (vgl. [8]). Auf diese Verfahren wird hier jedoch nicht eingegangen.

§ 7 Eine konkrete Lévy-Hinčin-Formel für Faltungshalbgruppen

Die Darstellung des infinitesimalen Generators einer Faltungshalbgruppe als Lévy-Hinčin-Formel wurde 1956 für den Fall einer Lie-Gruppe G von HUNT [15] bewiesen. Es seien dazu d die Dimension von G, $(X_i)_{i=1,\dots,d}$ eine Basis von $\mathcal{L}(G)$ und $(x_i)_{i=1,\dots,d} \subseteq \mathcal{D}(G)$ ein kanonisches Koordinatensystem von G um e bezüglich $(X_i)_{i=1,\dots,d}$. Ein linearer Operator N auf $C_0(G) + \mathbb{R}\cdot 1_G$ ist genau dann infinitesimaler Generator einer Faltungshalbgruppe, wenn N wenigstens auf $\overrightarrow{C}_2(G) + \mathbb{R}\cdot 1_G$ definiert ist und dort die Darstellung

$$Nf = \sum_{i=1}^{d} r_i \overrightarrow{X}_i f + \sum_{i,j=1}^{d} \alpha_{ij} \overrightarrow{X}_i \overrightarrow{X}_j f$$

$$+ \int_{G^*} \{R_y f - f - \sum_{i=1}^{d} x_i(y) X_i f\} \eta(dy)$$

besitzt. Dabei sind $r \in \mathbb{R}^d$, α eine positiv semidefinite symmetrische reelle dxd-Matrix und η ein Lévy-Maß auf G im Sinn der folgenden Definition.

7.1 Definition: Es sei G eine lokalkompakte Gruppe. Ein Maß η auf G* heißt Lévy-Maß auf G, wenn für $U \in \mathcal{U}(G)$ stets $\eta(\complement U) < \infty$ und für $f \in \mathcal{D}(G)_+$ mit $f(e) = 0$ auch $\int f d\eta < \infty$ ist.

Die Größen r, α und η sind durch die zugehörige Faltungshalbgruppe eineindeutig bestimmt. Wir sprechen in diesem Fall von einer Lévy-Hinčin-Darstellung (r, α, η) von N.

Anfang der siebziger Jahre konnte das Resultat von HUNT auf beliebige lokalkompakte Gruppen verallgemeinert werden, jedoch nicht für den infinitesimalen Generator einer Faltungshalbgruppe und nicht in der oben angegebenen konkreten Gestalt. Eine Axiomatisierung führte zu den Begriffen der Lévy-Abbildung und des fast positiven normierten Funktionals.

7.2 Definition: Sei E eine Unteralgebra von $C_o(G)$, die mit f auch f* enthält. Ein reelles lineares Funktional ψ auf E heißt

a) fast positiv, falls für $f \in E_+$ mit $f(e) = o$ stets $\psi(f) = o$ gilt,

b) primitive Form, falls ψ fast positiv ist und $\psi(fg^*) = \psi(f)g(e) - f(e)\psi(g)$ für alle $f,g \in E$ gilt,

c) quadratische Form, falls ψ fast positiv ist und $\psi(fg) + \psi(fg^*) = 2(\psi(f)g(e) + f(e)\psi(g))$ für alle $f,g \in E$ gilt,

d) normiert, falls es ein $U \in \mathfrak{U}(G)$ mit $\mathfrak{H}(U) := \{f \in E: 1_U \leq f \leq 1_G\} \neq \emptyset$ und $\sup\{\psi(f): f \in \mathfrak{H}(U)\} = o$ gibt.

7.3 Definition: Seien E eine Unteralgebra von $C_o(G)$ wie in 7.2 und $\Gamma: E \to E$ eine lineare Abbildung. Γ heißt Lévy-Abbildung für G, falls gilt:

a) Für jede primitive Form ψ auf E und jedes $f \in E$ ist $\psi(f - \Gamma(f)) = o$.

b) Es gilt $\Gamma(f)^* = -\Gamma(f)$ für alle $f \in E$.

c) Für alle $x \in G$ ist die Abbildung $f \to \Gamma(f)(x)$ eine primitive Form auf E.

Die Verallgemeinerung des Resultats von HUNT wurde durch folgende Aussage erreicht. Eine Linearform A auf $\mathcal{D}(G)$ ist erzeugendes Funktional einer Faltungshalbgruppe auf G genau dann, wenn A fast positiv und normiert auf $\mathcal{D}(G)$ ist ([13], 4.5.8). Dies ist genau dann der Fall, wenn A auf $\mathcal{D}(G)$ die Darstellung

$A(f) = \psi_1(f) + \psi_2(f) + \int_{G^*} \{f - f(e) - \Gamma(f)\} d\eta$ besitzt, wobei Γ eine Lévy-Abbildung für G, η ein Lévy-Maß auf G, ψ_1 eine primitive Form und ψ_2 eine quadratische Form auf $\mathcal{D}(G)$ sind ([13], 4.4.18). Im folgenden wird gezeigt, daß dieser Darstellung eine konkrete Lévy-Hinčin-Darstellung des Generators zu Grunde liegt, nun aber bezüglich der im allgemeinen nicht endlichen Basis von $\mathcal{L}(G)$. Dabei ergibt sich in sehr natürlicher Weise ein neuer Beweis für die Existenz einer Lévy-Abbildung für G.

Es sei an einige, direkt nachzurechnende Eigenschaften der Ableitung erinnert.

7.4 Proposition: Es seien $f \in C_o(G)$ und $X, Y \in \mathcal{L}(G)$.

a) Existiert $Yf(e)$, so auch $Yf^*(e) = - Yf(e)$.

b) Existiert YXf, so auch $XYf^*(e) = YXf(e)$.

c) Existiert $\overrightarrow{YX}f$, so auch $\overleftarrow{XY}f(e) = \overrightarrow{YX}f(e)$.

7.5 Lemma: Folgende Aussagen sind gleichwertig:

(i) ψ ist eine primitive Form auf $\mathcal{D}(G)$.

(ii) Es existiert ein $r = (r_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ mit

$$\psi(f) = \sum_{i \in I} r_i \, X_i f(e) \text{ für jedes } f \in \mathcal{D}(G).$$

In diesem Fall ist $r \in \mathbb{R}^I$ eindeutig durch ψ bestimmt.

Beweis: "(i) ⇒ (ii)": α) Es sei ψ eine primitive Form auf $\mathcal{D}(G)$. Dann ist ψ ebenfalls primitive Form auf $\mathcal{D}(G_1) \oplus 0$. Sei nun $a \in A$. Dann definiert $\psi_a(f^a) := \psi(f^a \circ p_a \oplus 0)$ eine primitive Form ψ_a auf $\mathcal{D}(G_a)$. Nach [13], 4.4.9 existiert eine eindeutig bestimmte Familie $(r_i^a)_{i \in I_a}$ aus $\mathbb{R}$ mit

$$\psi_a(f^a) = \sum_{i \in I_a} r_i^a X_i^a f^a(e) \text{ für alle } f^a \in \mathcal{D}(G_a).$$

β) Für jedes $i \in I$ wählen wir ein $a \in A$ mit $i \in I_a$ und setzen $r_i := r_i^a$. Dann ist die Familie $(r_i)_{i \in I}$ wohldefiniert (und daher eindeutig durch ψ bestimmt).

[Es ist zu zeigen, daß für $i \in I_a \cap I_b$ stets $r_i^a = r_i^b$ gilt. Unter diesen Voraussetzungen existiert aber ein $c \in A$ mit $c > a$, $c > b$. Für $f^a \in \mathcal{D}(G_a)$ gilt nach 4.6 daher

$$(\sum_{i \in I_a} r_i^a X_i^a) f^a(e) = \psi_a(f^a) = \psi_c(f^a \circ p_a^c)$$

$$= \sum_{i \in I_c} r_i^c (dp_a^c X_i^c) f^a(e) = (\sum_{i \in I_a} r_i^c X_i^a) f^a(e).$$

Nach Eigenschaft c) eines Koordinaten-Systems in § 4 trennt $\mathcal{D}(G_a)$ aber $\mathcal{L}(G_a)$. Es gilt also $\sum_{i \in I_a} r_i^a X_i^a = \sum_{i \in I_a} r_i^c X_i^a$ und somit $r_i^a = r_i^c$ für $i \in I_a$. Analog folgt $r_i^b = r_i^c$ für $i \in I_b$. ⌋

γ) Es ist nun die Gültigkeit der in (ii) angegebenen Darstellung von ψ zu zeigen.

Jedes $f \in \mathcal{D}(G)$ ist von der Form $f = \bigoplus_{z \in Z} R_z f_z$ für ein Repräsentantensystem Z von Linksnebenklassen von G_1 und $f_z \in \mathcal{D}(G_1)$ $(z \in Z)$. Nun existiert genau ein $z \in Z$ mit $e \in G_1 z^{-1}$. Nach [13], 4.4.7 ist ψ in e konzentriert. Es gilt somit $\psi(f) = \psi(R_z f_z \oplus 0)$. Besitzt f_z schließlich die Darstellung $f_z = f_z^a \circ p_a$ für ein $a \in A$ und $f_z^a \in \mathcal{D}(G_a)$, so erhält man

$$\psi(f) = \psi(R_z(f_z^a \circ p_a) \oplus 0) = \psi((R_{p_a(z)} f_z^a) \circ p_a \oplus 0)$$

$$= \psi_a(R_{p_a(z)} f_z^a) = \sum_{i \in I_a} r_i^a \, X_i^a(R_{p_a(z)} f_z^a)(e)$$

$$= \sum_{i \in I} r_i \, R_z(X_i(f_z^a \circ p_a))(e) = \sum_{i \in I} r_i X_i f(e). \qquad \square$$

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": ψ ist definiert nach 4.11 und ist Linearform nach 3.8 a). Ist $f \in \mathcal{D}(G)_+$ mit $f(e) = 0$, so besitzt f in e ein lokales Minimum; also ist $\psi(f) = 0$ nach 3.7 c). Aus 3.7 b) und 7.4 a) erhält man $\psi(fg^*) = \psi(f)g(e) - f(e)\psi(g)$ für alle $f \in \mathcal{D}(G)$. $\square$

Nach Vorgabe einer projektiven Basis von $\mathcal{L}(G)$ lassen sich daher auf Grund von 2.5 die primitiven Formen auf $\mathcal{D}(G)$ eineindeutig den Elementen aus $\mathcal{L}(G)$ zuordnen.

7.6 Korollar: a) Jede primitive Form auf $\mathcal{D}(G)$ ist auch auf $C^1(G)$ definiert.

b) Die Aussage von Lemma 7.5 bleibt gültig, falls $\mathcal{D}(G)$ durch $C^1(G)$ ersetzt wird.

Beweis: Wegen $\mathcal{D}(G) \subseteq C^1(G)$ ist nur die Aussage "(i) $\Rightarrow$ (ii)" von 7.5 für $C^1(G)$ zu zeigen. Nach dem Beweisteil α) von 7.5 kann man sich dabei auf den Fall einer Lie-Gruppe beschränken. Die Aussage kann dann aber wie im Beweis von 4.4.9 von [13] gezeigt werden. $\square$

Für die Formulierung der entsprechenden Aussage für quadratische Formen heiße eine reelle Matrix $\alpha = (\alpha_{ij})_{i,j \in I}$ positiv semidefinit, wenn jede endlich-dimensionale Untermatrix $(\alpha_{ij})_{i,j \in J}$ von α ($J \in \mathfrak{F}(I)$) positiv semidefinit ist.

7.7 Lemma: Folgende Aussagen sind gleichwertig:

(i) ψ ist quadratische Form auf $\mathcal{D}(G)$.

(ii) Es existiert eine symmetrische, positiv semidefinite reelle Matrix $\alpha = (\alpha_{ij})_{i,j\in I}$ mit

$$\psi(f) = \sum_{i,j\in I} \alpha_{ij} X_i X_j f(e) \text{ für alle } f \in \mathcal{D}(G).$$

In diesem Fall ist α durch ψ eindeutig bestimmt.

Beweis: "(i) $\Rightarrow$ (ii)": α) Es ist ψ quadratische Form auch auf $\mathcal{D}(G_1) \oplus \mathcal{O}$. Für $a \in A$ definiert $\psi_a(f^a) := \psi(f^a \circ p_a \oplus 0)$ eine quadratische Form ψ_a auf $\mathcal{D}(G_a)$. Nach [13], 4.4.9 gibt es eine positiv semidefinite symmetrische Matrix $\alpha^a = (\alpha^a_{ij})_{i,j\in I_a}$ mit $\psi_a(f^a) = \sum_{i,j\in I_a} \alpha^a_{ij} X^a_i X^a_j f^a(e)$ für alle $f^a \in \mathcal{D}(G_a)$. Nach [13], 4.4.16 und [16], 5.1 ist α^a eindeutig durch ψ_a bestimmt.

β) Für alle $i,j \in I$ wählen wir ein $a \in A$ mit $i,j \in I_a$ und setzen $\alpha_{ij} := \alpha^a_{ij}$. Dann ist die Matrix α wohldefiniert (und daher eindeutig durch ψ bestimmt).

[Für $a \in A$ sei $(x^a_i)_{i\in I_a}$ ein kanonisches Koordinatensystem von G_a in e bezüglich der Basis $(X^a_i)_{i\in I_a}$ von $\mathcal{D}(G_a)$. Seien nun $i,j \in I_a \cap I_b$. Nach [13], 4.4.9 ist α^a_{ij} definiert durch $\alpha^a_{ij} = \psi_a(x^a_i x^a_j)/2 = \psi((x^a_i \circ p_a \oplus 0)(x^a_j \circ p_a \oplus 0))/2$. Auf einer Umgebung von e in G stimmen $x^a_k \circ p_a$ und $x^b_k \circ p_b$ nach 4.17 überein ($k = i,j$). Nach [13], 4.4.7 ist ψ in e konzentriert, es gilt somit $\alpha^a_{ij} = \psi((x^a_i \circ p_a \oplus 0)(x^a_j \circ p_a \oplus 0))/2 = \alpha^b_{ij}$.]

γ) Nach Konstruktion ist α symmetrisch und positiv semidefinit. Die Darstellung aus (ii) weist man analog zu 7.5 nach. Auf Grund der Symmetrie von α gilt diese Darstellung für die rechts- wie für die linksseitige Ableitung (7.4 c)).

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": ψ ist definiert auf $\mathcal{D}(G)$ nach 4.11 und ist Linearform nach 3.8 a). Sei $f \in \mathcal{D}(G)_+$ mit $f(e) = 0$. Besitzt f die Darstellung $f = \bigoplus_{z \in Z} R_z f_z$ für ein Repräsentantensystem Z von Linksnebenklassen von G_1 und $f_z \in \mathcal{D}(G_1)$ $(z \in Z)$, so existiert genau ein $z \in Z$ mit $e \in G_1 z^{-1}$. Für dies z habe f_z die Darstellung $f_z = f_z^a \circ p_a$ für ein $a \in A$ und ein $f_z^a \in \mathcal{D}(G_a)$. Dann besitzt f_z^a bei $p_a(z)$ ein lokales Minimum. Wegen $X_i X_j f(e) = X_i^a X_j^a (R_{p_a(z)} f_z^a)(e) = (X_i^a X_j^a f_z^a)(p_a(z))$ ist die Matrix $(X_i X_j f(e))_{i,j \in I}$ positiv semidefinit. Also gilt $\psi(f) \geq 0$. Die definierende Gleichung von 7.2 c) zeigt man mit Hilfe von 3.7 b) und 7.4 b). □

7.8 Korollar: a) Jede quadratische Form auf $\mathcal{D}(G)$ ist auch auf $C^2(G)$ definiert.

b) Die Aussage von Lemma 7.7 bleibt gültig, falls $\mathcal{D}(G)$ durch $C^2(G)$ ersetzt wird.

7.9 Lemma: Folgende Aussagen sind gleichwertig:

(i) Γ ist eine Lévy-Abbildung für G auf $\mathcal{D}(G)$.

(ii) Es existiert eine schwaches Koordinatensystem $(k_i)_{i \in I}$ von G in e bezüglich der Basis $(X_i)_{i \in I}$ von $\mathcal{L}(G)$, so daß $\Gamma(f) = \sum_{i \in I} k_i X_i f(e)$ für alle $f \in \mathcal{D}(G)$ gilt.

Beweis: Unter Verwendung von 7.5 kann der Beweis der Implikation "(i) $\Rightarrow$ (ii)" wie der Beweis von [13], 4.4.12 geführt werden, falls dort die endliche Menge $\{1,..,n\}$ durch I ersetzt wird.

Für die andere Implikation beobachtet man, daß $\Gamma(f)$ für $f \in \mathcal{D}(G)$ als endliche Summe von Funktionen k_i ($i \in I$) definiert und aus $\mathcal{D}(G)$ ist. Eigenschaft a) von 7.3 folgt aus der Darstellung primitiver Formen auf $\mathcal{D}(G)$ nach 7.5. Auf Grund dieses Satzes besitzt Γ auch die Eigenschaft c). Eigenschaft b) schließlich folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von schwachen Koordinatensystemen. □

Mit Hilfe von 4.17 ergibt sich aus 7.9 ein neuer Beweis für die Existenz einer Lévy-Abbildung von G. Tatsächlich war die Existenz einer Lévy-Abbildung ein Hauptproblem bei der Gewinnung der Lévy-Hinčin-Darstellung des erzeugenden Funktionals einer Faltungshalbgruppe auf einer lokalkompakten Gruppe (vgl. [13], 4.3.11 und 4.4.13).

7.10 Korollar: a) Jede Lévy-Abbildung von G auf $\mathcal{D}(G)$ ist auch auf $C^1(G)$ definiert.

b) Die Aussage von Lemma 7.9 bleibt gültig, falls $\mathcal{D}(G)$ durch $C^1(G)$ ersetzt wird.

c) Für jede lokalkompakte Gruppe G existiert eine Lévy-Abbildung auf $C^1(G)$.

Wir können nun bereits einen Darstellungssatz für erzeugende Funktionale auf $\mathcal{D}(G)$ formulieren.

7.11 Satz: Es seien G eine lokalkompakte Gruppe und $(k_i)_{i\in I}$ ein schwaches Koordinatensystem von G in e bezüglich der projektiven Basis $(X_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{L}(G)$. Dann gelten folgende Aussagen:

a) Das erzeugende Funktional einer Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf G ist wenigstens auf $\mathcal{D}(G)$ definiert und dort fast positiv und normiert. Es existiert ein eindeutig bestimmtes Tripel (r,α,η), so daß

$$A(f) = \overline{\sum_{i\in I}} r_i X_i f(e) + \overline{\sum_{i,j\in I}} \alpha_{ij} X_i X_j f(e) + \int_{G^*} \{f(y) - f(e) - \overline{\sum_{i\in I}} k_i(y) X_i f(e)\}\eta(dy)$$

für alle $f\in\mathcal{D}(G)$ gilt. Dabei sind $r\in\mathbb{R}^I$, $\alpha = (\alpha_{ij})_{i,j\in I}$ eine positiv semidefinite symmetrische reelle Matrix und η ein Lévy-Maß auf G.

b) Zu jedem wie in a) beschriebenen Tripel (r,α,η) existiert genau eine Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf G, deren erzeugendes Funktional auf $\mathcal{D}(G)$ definiert ist und dort die in a) angegebene Darstellung gestattet.

Beweis: Die Aussagen ergeben sich mit Hilfe von 7.5, 7.7 und 7.9 aus den Sätzen 4.5.8 und 4.4.18 von [13]. □

Auf Grund dieser Darstellung des erzeugenden Funktionals einer Faltungshalbgruppe hat man die Möglichkeit, auch den Generator und seinen Definitionsbereich genauer zu beschreiben.

7.12 Bezeichnung: In der Situation von Satz 7.11 sei $\mathcal{N}$ die Menge der Operatoren $(N,D(N))$ auf $C_o(G)$ mit $\vec{C}^2(G) \subseteq D(N)$, für die folgendes gilt:
Es existieren ein $r \in \mathbb{R}^I$, eine positiv semidefinite symmetrische reelle IxI-Matrix α und ein Lévy-Maß η auf G, so daß

$$Nf = \sum_{i \in I} r_i \vec{X}_i f + \sum_{i,j \in I} \alpha_{ij} \vec{X}_i \vec{X}_j f + \int_{G^*} \{R_y f - f - \sum_{i \in I} k_i(y) \vec{X}_i f\} \eta(dy)$$

für alle $f \in \vec{C}^2(G)$ gilt. Es soll dann (r,α,η) das zu N gehörige Tripel genannt werden.

7.13 Proposition: Es sei $N \in \mathcal{N}$. Für alle $f \in \vec{C}^2(G)$ sei $B(f) := Nf(e)$. Nach 7.11 ist $\mathrm{Res}(\mathcal{D}(G),B)$ die Einschränkung auf $\mathcal{D}(G)$ des erzeugenden Funktionals einer eindeutig bestimmten Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf G. Für die zugehörige Kontraktionshalbgruppe $(T(t))_{t \geq o}$ gilt
$\lim_{h \to o} \| \frac{1}{h} \{T(h)f - f\} - Nf \|_o = 0$ für alle $f \in \mathcal{D}(G)$.

Beweis: Sei $(N',D(N'))$ der Generator von T. Nach [13], 4.5.9 gilt $\mathcal{D}(G) \subseteq D(N')$. Für $f \in \mathcal{D}(G)$ und $x \in G$ ist aber

$$N'f(x) = \lim_{h \to o} \frac{1}{h} \{T(h)f(x) - f(x)\} = \lim_{h \to o} \frac{1}{h} \{T(h)L_x f(e) - L_x f(e)\}$$
$$= B(L_x f) = N(L_x f)(e) = Nf(x).$$

Also gilt $\mathrm{Res}(\mathcal{D}(G),N') = \mathrm{Res}(\mathcal{D}(G),N)$ und damit die Behauptung. □

7.14 Proposition: Ist G eine Lie-projektive Gruppe, so gilt die Aussage von 7.13 für alle $f \in \vec{C}^2(G)$.

Beweis: Seien $\{H_a : a \in A\}$ das Lie-System zu G und $(\mu(t))_{t\geq 0}$ die nach 7.11 zu B gehörige Faltungshalbgruppe. Für $a \in A$ und $f^a \in \mathcal{D}(G_a)$ setze $N_a(f^a) := N(f^a \circ p_a)$. Dann ist N_a die Restriktion auf $\mathcal{D}(G_a)$ des Generators der zu der Faltungshalbgruppe $(p_a(\mu(t)))_{t\geq 0}$ gehörigen Kontraktionshalbgruppe $(T^a(t))_{t\geq 0}$ ([13], p. 306). Nach dem Satz von Hunt (vgl. [13], 4.2.8) gilt $\vec{C}_2(G_a) \subseteq D(N_a)$. Für $f = f^a \circ p_a \in \vec{C}^2(G)$ folgt

$$\lim_{h\downarrow 0} \left\| \frac{1}{h}\{T(h)(f^a \circ p_a) - f^a \circ p_a\} - N(f^a \circ p_a) \right\|_0$$
$$= \lim_{h\downarrow 0} \left\| \frac{1}{h}\{T^a(h)f^a - f^a\} - N_a f^a \right\|_0 = 0.$$

Die Behauptung folgt nun aus der Definition von $\vec{C}^2(G)$. □

7.15 Lemma: Die Aussage von 7.14 gilt für jede lokalkompakte Gruppe.

Beweis: Seien G eine lokalkompakte Gruppe mit Lie-projektiver offener Untergruppe G_1 und $N \in \mathcal{N}$ mit zugehörigem Tripel (r,α,η). Jedes f aus $\vec{C}^2(G)$ besitzt eine Darstellung $f = \bigoplus_{z\in Z} L_z f_z$ für ein Repräsentantensystem Z von Rechtsnebenklassen von G_1 und $f_z \in \vec{C}^2(G_1)$ $(z \in Z)$. Es gilt

$$f = \sum_{z\in Z'} L_z(f_z \oplus 0) \text{ für eine geeignete Teilmenge } Z' \in \mathcal{F}(Z)$$

und daher

$$\left\| \frac{1}{h}\{T(h)f - f\} - Nf \right\|_0$$
$$\leq \sum_{z\in Z'} \left\| \frac{1}{h}\{T(h)(f_z \oplus 0) - (f_z \oplus 0)\} - N(f_z \oplus 0) \right\|_0.$$

Daher ist die Behauptung nur noch für $f \in \vec{C}^2(G_1) \oplus 0$ zu zeigen.

α) Es seien $\eta_1 := \mathrm{Res}(G_1, \eta)$ und $\eta_2 := \mathrm{Res}(\zeta G_1, \eta)$. Der zu dem Tripel (r, α, η_1) gehörige Operator werde mit N_1 bezeichnet, und für $f \in C_o(G)$ werde $N_2 f := \int \{R_y f - f\}\, \eta_2(dy)$ gesetzt. B_1 bzw. B_2 seien die durch N_1 bzw. N_2 definierten linearen Funktionale, $(\nu(t))_{t \geq o}$ sei die zu B_1 nach 7.11 gehörige Faltungshalbgruppe und $(S(t))_{t \geq o}$ die durch diese Faltungshalbgruppe erzeugte Kontraktionshalbgruppe auf $C_o(G)$. Ohne Einschränkung können wir $\mathrm{Res}(\zeta G_1, k_i) = 0$ für $i \in I$ annehmen (vgl. 4.17). Daher gilt $Nf = N_1 f + N_2 f$ für alle f aus $\vec{C}^2(G)$. Nach [13], 6.1.5 ist N_2 Generator einer Poisson'schen Faltungshalbgruppe und als solcher ein beschränkter Operator mit $D(N_2) = C_o(G)$.

β) Für $f \in \vec{C}^2(G_1) \oplus 0$ gilt $\lim\limits_{h \downarrow o} \left\| \frac{1}{h} \{S(h)f - f\} - N_1 f \right\|_o = o$. $\Gamma(r, \alpha, \eta_1)$ definiert einen mit N_1' bezeichneten Operator auf $\vec{C}^2(G_1)$. Mit B_1', $(\nu'(t))_{t \geq o}$ bzw. $(S'(t))_{t \geq o}$ werden das zugehörige erzeugende Funktional, die zugehörige Faltungshalbgruppe bzw. die zugehörige Kontraktionhalbgruppe auf $C_o(G_1)$ bezeichnet. Nach 7.14 gilt $\lim\limits_{h \downarrow o} \left\| \frac{1}{h} \{S'(h)f - f\} - N_1' f \right\|_o = o$ für alle $f \in \vec{C}^2(G_1)$.

Nun sei $\nu'(t)$ durch 0 auf G zu $\nu''(t)$ fortgesetzt $(t \geq o)$. $(S''(t))_{t \geq o}$ sei die von $(\nu''(t))_{t \geq o}$ erzeugte Kontraktionshalbgruppe auf $C_o(G)$. Wir haben dann $N_1(f \oplus 0) = N_1' f \oplus 0$ für $f \in C^2(G_1)$ und daher

(*) $\lim\limits_{h \downarrow o} \left\| \frac{1}{h} \{S'(h)f - f\} - N_1 f \right\|_o = o$ für alle $f \in \vec{C}^2(G_1) \oplus 0$.

Es gilt aber sogar $\lim\limits_{h \downarrow o} \left| \frac{1}{h} \{\int f - f(e) d\nu''(h)\} - N_1 f(e) \right| = o$ für alle f aus $\mathcal{D}(G)$:

[Für $f \in \mathcal{D}(G_1) \oplus 0$ gilt dies analog zu (*). Für $L_z f \oplus 0$ aus $\mathcal{D}(z^{-1}G_1) + 0$ gilt diese Aussage, da $\{z^{-1}G_1 : z \in Z\}$ im Rahmen der Konstruktion von $\mathcal{D}(G)$ ein System disjunkter Nebenklassen von G_1 ist, und somit $\mathrm{supp}(L_z f) \cap G_1 \subseteq B \in \{\emptyset, G_1\}$ gilt. Die Aussage bleibt gültig für eine endliche Summe solcher Funktionen. ⌋

Also ist $(\nu''(t))_{t \geq 0}$ die nach [13], 4.5.6 eindeutig bestimmte, zu B_1 gehörige Faltungshalbgruppe auf G. Es folgt $S''(t) = S(t)$ für $t \geq 0$ und damit aus (*) die Behauptung β). ⌋

γ) N_1 ist Generator einer Kontraktionshalbgruppe auf $C_o(G)$ mit $D(N_1) \supseteq \vec{C}^2(G_1) \oplus 0$. Der Operator N_2 ist beschränkt mit $D(N_2) = C_o(G)$. Nach [5], 3.7 ist $N_1 + N_2$ Generator einer Kontraktionshalbgruppe $(T'(t))_{t \geq 0}$. Nach [5], 3.1 gilt $D(N_1 + N_2) = D(N_1) \supseteq \vec{C}^2(G_1) \oplus 0$. Für $f \in \mathcal{D}(G)$ haben wir aber $(N_1 + N_2)f = Nf$. Wiederum nach [13], 4.5.6 gilt $T'(t) = T(t)$ $(t \geq o)$. Aus $D(N) \supseteq \vec{C}^2(G_1) \oplus 0$ folgt dann die Behauptung. □

Nach diesen Vorbereitungen kann nun, wie angekündigt, das Resultat von HUNT in voller Allgemeinheit für eine beliebige lokalkompakte Gruppe bewiesen werden.

7.16 Satz: Es seien G eine lokalkompakte Gruppe und $(k_i)_{i \in I}$ eine schwaches Koordinatensystem von G in e bezüglich der projektiven Basis $(X_i)_{i \in I}$ von $\mathcal{L}(G)$.

Dann gelten folgende Aussagen:

a) Der Generator N einer Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf G ist aus $\mathcal{N}$. Das zu N gehörige Tripel (r,α,η) ist durch die Faltungshalbgruppe eindeutig bestimmt.

b) Zu jedem $N \in \mathcal{N}$ existiert eine eindeutig bestimmte Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf G, deren Generator wenigstens auf $\vec{C}^2(G)$ definiert ist und dort mit N übereinstimmt.

Beweis: a) Ist N Generator einer Faltungshalbgruppe auf G, so ist $B(f) := Nf(e)$ für $f \in D(N) \supseteq \mathcal{D}(G)$ die Restriktion auf D(N) des erzeugenden Funktionals dieser Faltungshalbgruppe. Nach 7.11 besitzt B eine Lévy-Hinčin-Darstellung auf $\mathcal{D}(G)$ bezüglich einem eindeutig bestimmten Tripel (r,α,η). Setzt man $N'f(x) := B(L_x f)$ für $f \in \mathcal{D}(G)$, so gilt $\mathrm{Res}(\mathcal{D}(G),N) = N'$. Also besitzt N eine Lévy-Hinčin-Darstellung der Form (r,α,η) auf $\mathcal{D}(G)$. Nach 7.15 definiert aber (r,α,η) den Generator N'' einer eindeutig bestimmten Faltungshalbgruppe mit $D(N'') \supseteq \vec{C}^2(G)$. Somit gilt $D(N) \supseteq \vec{C}^2(G)$ und $Nf = N''f$ für alle $f \in \vec{C}^2(G)$.

b) Unter den Voraussetzungen definiert $Bf := Nf(e)$ für $f \in \mathcal{D}(G)$ nach 7.11 das erzeugende Funktional einer eindeutig bestimmten Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf G. Nach 7.15 stimmt aber N auf $\vec{C}^2(G)$ mit dem Generator der zugehörigen Kontraktionshalbgruppe überein. □

Aus diesem Satz ergibt sich als Verschärfung von Satz 7.11 die entsprechende Aussage über den Definitionsbereich und die Darstellung des erzeugenden Funktionals einer Faltungshalbgruppe.

7.17 Korollar: Es seien G eine lokalkompakte Gruppe und $(k_i)_{i\in I}$ ein schwaches Koordinatensystem von G in e bezüglich der projektiven Basis $(X_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{L}(G)$. Dann gelten folgende Aussagen:

a) Das erzeugende Funktional A einer Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf G ist wenigstens auf $\overset{+}{C}^2(G)$ definiert und dort fast positiv und normiert. Es existiert ein eindeutig bestimmtes Tripel (r,α,η), so daß

$$A(f) = \sum_{i\in I} r_i X_i f(e) + \sum_{i,j\in I} \alpha_{ij} X_i X_j f(e) + \int_{G^*} \{f(y) - f(e) - \sum_{i\in I} k_i(y) X_i f(e)\}\, \eta(dy)$$

für alle $f \in \overset{+}{C}^2(G)$ gilt. Dabei sind $r \in \mathbb{R}^I$, $\alpha = (\alpha_{ij})_{i,j\in I}$ eine positiv semidefinite symmetrische reelle Matrix und η ein Lévy-Maß auf G.

b) Zu jedem wie in a) beschriebenen Tripel (r,α,η) existiert genau eine Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf G, deren erzeugendes Funktional auf $\overset{+}{C}^2(G)$ definiert ist und dort die in a) angegebene Darstellung gestattet.

Der Generator N einer Faltungshalbgruppe auf einer beliebigen lokalkompakten Gruppe ist im allgemeinen nicht stetig von $(\vec{C}^2(G), \|\cdot\|_2^{\rightarrow})$ nach $C_o(G)$. Die Stetigkeit gilt nur unter einschränkenden Bedingungen an das nach 7.16 zu N gehörige Tripel (r,α,η).

7.18 Korollar: Es seien G eine lokalkompakte Gruppe mit Lie-projektiver offener Untergruppe G_1. Ferner sei $\mathfrak{H} = \{H_a : a \in A\}$ ein Lie-System für G_1 und $\mathfrak{X} = (X_i)_{i\in I}$ eine projektive Basis von $\mathfrak{L}(G)$ bezüglich $\mathfrak{H}$. Ein normbeschränktes schwaches Koordinatensystem $(k_i)_{i\in I}$ von G bezüglich $\mathfrak{X}$ sei gemäß 4.17 bzw. 4.18 aus einer Familie kanonischer Koordinatensysteme $(x_i^a)_{i\in I_a}$ der Lie-Gruppen (G_1/H_a) konstruiert $(a \in A)$. Für alle $a \in A$ sei schließlich $V_a \in \mathfrak{U}(G_1/H_a)$ so gewählt, daß $(x_i^a)_{i\in I_a} : V_a \to \mathbb{R}^{I_a}$ ein Homöomorphismus ist.
Dann gelten folgende Aussagen.

a) Es sei $(\mu(t))_{t\geq o}$ eine Faltungshalbgruppe auf G mit Generator N und zugehörigem Tripel (r,α,η). Die Größen $\sup_{i\in I}|r_i|$, $\sup_{i,j\in I}|\alpha_{ij}|$, $\sup_{a\in A} p_a(\mathrm{Res}(G_1,\eta))(\zeta V_a)$ und $\sup_{i\in I}\int_{G^*} k_i^2 d\eta$ seien endlich.
Dann gilt $D(N) \supseteq \vec{C}_2(G)$. Der Operator $\mathrm{Res}(\vec{C}_2(G),N)$ ist stetig von $(\vec{C}_2(G), \|\cdot\|_2^{\rightarrow})$ nach $C_o(G)$ und besitzt auf $\vec{C}_2(G)$ eine Lévy-Hinčin-Darstellung gemäß 7.12.

b) Zu jedem Tripel (r,α,η) mit den in a) festgelegten Eigenschaften existiert eine Faltungshalbgruppe auf G, deren infinitesimaler Generator einen $\vec{C}_2(G)$ um-

Beweis: a) Wir zeigen zunächst, daß der Operator N stetig von $(\vec{C}^2(G), \|\cdot\|_2^{\rightarrow})$ nach $(C_o(G), \|\cdot\|_o)$ ist. Da dies nach 4.15 für einen Generator der Form $(r,\alpha,0)$ unter den Voraussetzungen offensichtlich gilt, sei im weiteren $r_i = \alpha_{i,j} = o$ $(i,j \in I)$. Sei $f \in \vec{C}^2(G)$. Dann existieren ein Repräsentantensystem Z von Linksnebenklassen von G bzgl. G_1 sowie für jedes $z \in Z$ ein $a \in A$ und ein $f_z^a \in \vec{C}_2(G_1/H_a)$ mit $f = \bigoplus_{z \in Z} L_z(f_z^a \cdot p_a)$.
Für die Funktion $h := h_z^a := f_z^a \cdot p_a \oplus 0$ erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
&\|Nh\|_o \\
&\leq \sup_{x \in G} \Big| \int_{G^*} \{h(xy) - h(x) - \sum_{i \in I} k_i(y)\, \vec{X}_i h(x)\}\, \eta(dy) \Big| \\
&\leq \sup_{x \in G_1} \Big| \int_{G_1^*} \{h(xy) - h(x) - \sum_{i \in I} k_i(y)\, \vec{X}_i h(x)\}\, \eta(dy) \Big| \\
&\quad + \sup_{x \notin G_1} \Big| \int_{\complement G_1} \{h(xy) - h(x) - \sum_{i \in I} k_i(y)\, \vec{X}_i h(x)\}\, \eta(dy) \Big| \\
&\leq \sup_{x_a \in V_a} \Big| \int_{V_a} \{\sum_{i,j \in I_a} x_i^a(y_a)\, x_j^a(y_a)\, \vec{X}_i^a \vec{X}_j^a f_z^a(x\xi(y_a))\}\, p_a(\eta_1)(dy_a) \Big| \\
&\quad + 2\, \|f_z^a\|_1^{\rightarrow} \{p_a(\eta_1)(\complement V_a) + \eta_1(\complement G_1)\} \\
&\leq 2\, \|h\|_2^{\rightarrow} \{\max_{i \in I_a} \int_{G^*} k_i^2 d\eta + p_a(\eta_1)(\complement V_a) + \eta_1(\complement G_1)\}.
\end{aligned}
$$

Dabei benutzen wir 4.10, die Invarianz von rechtsseitiger Ableitung und Integration unter den Linksshiftoperatoren, eine rechtsseitige Taylorentwicklung von f_z^a in V_a nach [19], 1.6 sowie die Höldersche Ungleichung. $\xi(y_a)$ ist auf Grund der Gültigkeit der Taylorentwicklung aus V_a geeignet wählbar. Analog erhalten wir für die Funktion f und geeignete von f unabhängige Konstante $c, c' \in \mathbb{R}_+^*$ die Abschätzung

$$\|Nf\|_o \leq c \cdot \max_{z \in Z} \|h_z^a\|_2^{\rightarrow} + \|f\|_1^{\rightarrow} \leq c' \cdot \|f\|_2^{\rightarrow}.$$

Also ist $\mathrm{Res}(\vec{C}^2(G),N) \in \mathcal{L}((\vec{C}^2(G), \|\cdot\|_2^{\rightarrow}),(C_o(G), \|\cdot\|_o))$. Aus der Abgeschlossenheit von N folgt $D(N) \supseteq \vec{C}_2(G)$ mit Hilfe von 4.14. Zudem stimmt daher die stetige Fortsetzung von $\mathrm{Res}(\vec{C}^2(G),N)$ auf $\vec{C}_2(G)$ mit $\mathrm{Res}(\vec{C}_2(G),N)$ überein. Diese stetige Fortsetzung kann wieder durch die Lévy-Hinčin-Formel dargestellt werden. Damit ist a) bewiesen. Aussage b) ist eine Kombination von Satz 7.16 und Aussage a). □

7.19 Korollar: Ist G eine Lie-Gruppe, so ist der Generator N einer Faltungshalbgruppe stets aus $\mathcal{L}(\vec{C}_2(G),C_o(G))$.

Beweis: Ist G Lie-Gruppe, so ist $\mathcal{G} = \{\{e\}\}$ das einzige Lie-System für G. Zudem ist $\mathcal{L}(G)$ endlich-dimensional. Die Forderungen an r und α sind offensichtlich erfüllt. Diejenigen an η folgen aus der Definition des Lévy-Maßes. □

7.20 Bemerkung: Sind $(\mu(t))_{t\geq o}$ eine Faltungshalbgruppe auf G und N ihr Generator, so gilt offensichtlich $\mathbb{R}\cdot 1_G \subseteq D(N)$ und $N(c\cdot 1_G) = 0$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Andererseits ist jeder Operator N aus $\mathcal{N}$ auch auf $\mathbb{R}\cdot 1_G$ definiert und ist auch dort Generator seiner Faltungshalbgruppe. Daher lassen sich alle Aussagen dieses Paragraphen von den Räumen $\vec{C}_k(G)$, $\vec{C}^k(G)$ sowie $\mathcal{D}(G)$ auf die Räume $\vec{C}_k(G) + \mathbb{R}\cdot 1_G$, $\vec{C}^k(G) + \mathbb{R}\cdot 1_G$ und $\mathcal{D}(G) + \mathbb{R}\cdot 1_G$ in entsprechender Weise ausdehnen (vgl. auch [13], 4.2 und [19], 2.2).

§ 8 Charakterisierung der Faltungshemigruppen von beschränkter Variation

In diesem Paragraphen soll die Frage untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen einer vorgegebene Faltungshemigruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf G eine Generatorfamilie (eindeutig) in der Weise zugeordnet werden kann, daß die Evolutionsgleichungen als operatorwertige Riemann-Stieltjes-Integrale erfüllt sind (vgl. § 6). Für Hemigruppen von beschränkter Variation gelingt dies mit Hilfe einer von HEROD und McKELVEY [11] entwickelten Hille-Yosida-Theorie.

8.1 Definition: Eine Faltungshemigruppe $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf G heißt von beschränkter Variation (auf $\overleftarrow{C}_2(G)$), wenn es eine stetige Funktion $v: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$\|T_{\mu(s,t)}f - f\|_o \leq (v(t) - v(s))\|f\|_2^{\leftarrow}$$

für alle $(s,t)\in D$ und $f\in \overleftarrow{C}_2(G)$ gilt. Insbesondere ist damit v isoton.

Wir setzen im folgenden $(\overleftarrow{C}_o(G), \|\cdot\|_o^{\leftarrow}) := (C_o(G), \|\cdot\|_o)$. Für $j,k\in\mathbb{Z}_+$ und $T\in\mathcal{L}(\overleftarrow{C}_j(G),\overleftarrow{C}_k(G))$ bezeichne $\|T\|_{j,k}^{\leftarrow}$ die Norm von T. Eine Faltungshemigruppe $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ ist genau dann von beschränkter Variation auf $\overleftarrow{C}_2(G)$, wenn die Abbildung $(s,t)\mapsto \|T_{\mu(s,t)} - 1\|_{2,0}^{\leftarrow}$ von D nach $\mathbb{R}$ stetig und in folgendem Sinn von beschränkter Variation ist:

$$\sup_{Z\in\mathfrak{Z}(s,t)} \sum_{z_j\in Z} \|T_{\mu(z_{j-1},z_j)} - 1\|_{2,0}^{\leftarrow} < \infty$$

für alle $(s,t)\in D$.

Der Begriff der beschränkten Variation ist mit Integralgleichungen schon in der Analysis eng verbunden. Hemigruppen von beschränkter Variation wurden von SIEBERT untersucht ([19], 1.6 und 7.). Ist G eine Lie-Gruppe mit relativ kompakter adjungierter Gruppe, so stimmt die dort angegebene Definition mit Definition 8.1 überein.

Für eine Kontraktionshalbgruppe T mit Generator (N,D(N)) gilt bekanntlich $T(t)f - f = \int_0^t T(u)Nf\,du$ und daher $\|T(t-s)f - f\|_0 \leq (t-s)\|f\|_N$ für $0 \leq s \leq t$ und $f \in D(N)$, falls $\|f\|_N := \|f\|_0 + \|Nf\|_0$ die Graphennorm von f bezeichnet. Daher ist eine Faltungshalbgruppe im allgemeinen nur dann von beschränkter Variation, wenn ihr Generator auf $\overleftarrow{C}_2(G)$ definiert ist und als Abbildung von $(\overleftarrow{C}_2(G), \|\cdot\|_2^{\leftarrow})$ nach $(C_0(G), \|\cdot\|_0)$ stetig ist. Dies gilt etwa für Lie-Gruppen mit relativ kompakter adjungierter Gruppe ([19], 8.).

Die Charakterisierung von Faltungshemigruppen von beschränkter Variation fußt wesentlich auf den Ergebnissen aus [11]. In dieser Arbeit wird eine Hille-Yosida-Theorie für Evolutionsfamilien auf (nicht notwendig unendlichen) Banachraum-Ketten entwickelt. Wir betrachten hier aber nur (abzählbar) unendliche Banachraum-Ketten.

8.2 Definition: Eine Familie $\mathcal{E} = ((E_j, \|\cdot\|_j))_{j \in \mathbb{Z}_+}$ von Banachräumen heißt Banachraum-Kette, falls E_{j+1} dichter linearer Teilraum von $(E_j, \|\cdot\|_j)$ ist und $\|x\|_j \leq \|x\|_{j+1}$ für alle $x \in E_{j+1}$ und $j \in \mathbb{Z}_+$ gilt.
Sind $j,k \in \mathbb{Z}_+$ und $T \in \mathcal{L}(E_j, E_k)$, so bezeichne $\|T\|_{j,k}$ die Norm von T.

8.3 Proposition: Die Familie $((\overleftarrow{C}_{2k}(G), \|\cdot\|_{2k}^{\leftarrow}))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ bildet eine (unendliche) Banachraum-Kette.

Beweis: Diese Aussage ergibt sich aus den Sätzen 4.2, 4.4 und 4.14 sowie aus der Definition der Norm $\|\cdot\|_k^{\leftarrow}$. □

Kontraktionen und Generatoren können auf verschiedene Weise an Banachraum-Ketten angepaßt sein.

8.4 Definition: Es sei $\mathcal{E}$ eine Banachraum-Kette und W ein linearer Operator auf E_0 mit Werten in E_0.

a) Für $j\in\mathbb{Z}_+$ sei $E_j^W := \{f\in E_j \cap D(W): Wf\in E_j\}$. Wir bezeichnen mit $W_j := \mathrm{Res}(E_j^W, W)$ den Anteil von W in E_j.

b) W heißt m-kontraktiv auf $\mathcal{E}$, falls $E_j^W = E_j$ und $\|W_j\|_{j,j} \leq 1$ für alle $j\in\mathbb{Z}_+$ gelten.

c) W heißt m-dissipativ auf $\mathcal{E}$, falls für $j\in\mathbb{Z}_+$ und $\lambda > 0$ folgende Aussagen gelten:

(i) E_j^W ist dicht in E_j,

(ii) $(1 - \lambda W_j)$ ist surjektiv auf E_j,

(iii) $\|1 - \lambda W_j\|_{j,j} \geq 1$.

Auch für m-kontraktive Operatoren kann mit Hilfe von 4.3 e) ein Beispiel angegeben werden.

8.5 Proposition: Für jedes $\mu\in\mathcal{M}^1(G)$ ist T_μ m-kontraktiv auf $((\overleftarrow{C}_{2k}(G), \|\cdot\|_{2k}^{\leftarrow}))_{k\in\mathbb{Z}_+}$.

Es müssen nun aber nicht einzelne Operatoren, sondern operatorwertige Intervallfunktionen betrachtet werden. Auch diese sind in zweifacher Art an Banachraum-Ketten angepaßt.

8.6 Definition: Es seien $\mathcal{E}$ eine Banachraum-Kette und $W:D \to L(E_o,E_o)$ eine Operatorfamilie.

a) W heißt multiplikativ auf $\mathcal{E}$, falls

$W(r,t) = W(s,t)\cdot W(r,s)$ für alle $(r,s), (s,t) \in D$ gilt, und falls eine stetige additive Funktion $\gamma_W:D \to \mathbb{R}$ existiert mit $E_{j+1} \subseteq E_j^{W(s,t)}$ und

$\|W(s,t) - 1\|_{j+1,j} \leq \gamma_W(s,t)$ für alle $(s,t) \in D$ und $j \in \mathbb{Z}_+$.

b) W heißt additiv auf $\mathcal{E}$, falls

$W(r,t) = W(r,s) + W(s,t)$ für alle $(s,t) \in D$ gilt, und falls eine stetige additive Funktion $\gamma_W:D \to \mathbb{R}$ existiert mit $E_{j+1} \subseteq E_j^{W(s,t)}$ und

$\|W(s,t)\|_{j+1,j} \leq \gamma_W(s,t)$ für alle $(s,t) \in D$ und $j \in \mathbb{Z}_+$.

8.7 Proposition: Die Evolutionsfamilie einer Hemigruppe von beschränkter Variation ist multiplikativ auf $((\overset{+}{C}_{2k}(G), \|\cdot\|_{2k}^{+}))_{k \in \mathbb{Z}_+}$.

Beweis: Die Aussage folgt aus der Definition 8.1, denn

$\|(T_{\mu(s,t)} - 1)f\|_o \leq (v(t) - v(s))\|f\|_2^{+}$ impliziert

$\|(T_{\mu(s,t)} - 1)f\|_{2k}^{+} \leq 3(v(t) - v(s))\|f\|_{2k+2}^{+}$ für alle $(s,t) \in D$, $k \in \mathbb{Z}_+$ und $f \in \overset{+}{C}_{2k+2}(G)$. Nun hat man nur noch $\gamma_T(s,t) := 3(v(t) - v(s))$ für alle $(s,t) \in D$ zu setzen. □

Eine Anwendung der Ergebnisse von [11] führt nun zu folgender Charakterisierung der Hemigruppen von beschränkter Variation.

8.8 Satz: Es seien $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ eine Faltungshemigruppe auf G von beschränkter Variation und T die zugehörige Evolutionsfamilie. Dann existiert genau eine auf $((\overleftarrow{C}_{2k}(G), \|\cdot\|_{2k}^{\leftarrow}))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ additive und m-dissipative Operatorfamilie $M = (M(s,t))_{(s,t)\in D}$, so daß für alle $(s,t)\in D$ gelten:

$$(*)\quad T(s,t) - 1 = \int_s^t M(du)T(s,u)$$

$$:= \lim_{Z\in\mathfrak{Z}(s,t)} \sum_{z_j\in Z} M(z_{j-1},z_j)T(s,z_j)$$

und

$$(**)\quad M(s,t) = \int_s^t (T(du) - 1)$$

$$:= \lim_{Z\in\mathfrak{Z}(s,t)} \sum_{z_j\in Z} (T(z_{j-1},z_j) - 1).$$

Die Grenzwerte gelten im Sinne der Operatornorm in $\mathcal{L}(\overleftarrow{C}_{2k+4}(G),\overleftarrow{C}_{2k}(G))$ und punktweise in $\mathcal{L}(\overleftarrow{C}_{2k+2}(G),\overleftarrow{C}_{2k}(G))$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$.

Beweis: Die zu $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ gehörige Evolutionsfamilie T ist auf $\mathcal{E} := ((\overleftarrow{C}_{2k}(G), \|\cdot\|_{2k}^{\leftarrow}))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ multiplikativ und m-kontraktiv (8.5 und 8.7). Nach den Theoremen 4.1 und 5.1 von [11] existiert M im Sinn von (**). M ist additiv und m-dissipativ auf $\mathcal{E}$ nach Cor 5.1 von [11]. Nach Theorem 8.2 von [11] sind aber in diesem Fall die Aussagen (*) und (**) gleichwertig. Da M durch (**) eindeutig bestimmt ist, ist M die einzige auf $\mathcal{E}$ additive und m-dissipative Lösung von (*). □

Es kann nun gezeigt werden, daß die einer Hemigruppe von beschränkter Variation durch 8.8 zugeordnete Generatorfamilie auch die Rückwärtsevolutionsgleichung erfüllt.

8.9 Korollar: Sei $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ eine Hemigruppe auf G von beschränkter Variation. Für die nach Satz 8.8 zugehörige Generatorfamilie M gilt $T_{\mu(s,t)} - 1 = \int_s^t T_{\mu(u,t)} M(du)$ im Sinn der Konvergenzaussage von Satz 8.8.

Beweis: Wir setzen $(E_k, \|\cdot\|_k) := (\overset{+}{C}_{2k}(G), \|\cdot\|^{+}_{2k})$ für alle $k \in \mathbb{Z}_+$ und $T(s,t) := T_{\mu(s,t)}$ für $(s,t) \in D$.

α) Nach dem bereits zum Beweis von 8.8 zitierten Theorem 8.2 aus [11] sind die Aussagen (*) und (**) von 8.8 gleichwertig zu folgender Aussage:

Es existieren eine additive Funktion a und eine muliplikative Funktion m jeweils von D in $\mathbb{R}$ mit

$$a(s,t) = \int_s^t (m(du) - 1) := \lim_{Z \in \mathfrak{Z}(s,t)} \sum_{z_j \in Z} (m(z_{j-1}, z_j) - 1),$$

$$m(s,t) = \prod_s^t (1 + a(du)) := \lim_{Z \in \mathfrak{Z}(s,t)} \prod_{z_j \in Z} (1 + a(z_{j-1}, z_j))$$

und

$$\|T(s,t) - 1 - M(s,t)\|_{j+2,j} \leq m(s,t) - 1 - a(s,t)$$

für alle $(s,t) \in D$ und $j \in \mathbb{Z}_+$.

β) Für $j \in \mathbb{Z}_+$, $f \in E_{j+2}$ und $(s,t) \in D$ seien $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ aus $\mathfrak{Z}(s,t)$ und $\tilde{z}_k \in [z_{k-1}, z_k[$ $(k \leq n)$. Es seien γ_M und γ_T die gemäß 8.6 zu M bzw. T gehörigen stetigen additiven Funktionen. Dann gilt die folgende Abschätzung:

$$\|\{T(s,t) - 1 - \sum_{q=1}^{n} T(\tilde{z}_q,t)\, M(z_{q-1},z_q)\}f\|_j$$

$$= \|\{\sum_{q=1}^{n} T(z_q,t)(T(z_{q-1},z_q) - 1) - \sum_{q=1}^{n} T(\tilde{z}_q,t)M(z_{q-1},z_q)\}f\|_j$$

$$\leq \|\{\sum_{q=1}^{n} T(z_q,t)\,(T(z_{q-1},z_q) - 1 - M(z_{q-1},z_q))\}f\|_j$$

$$+ \|\{\sum_{q=1}^{n} T(\tilde{z}_q,t)\,(T(z_{q-1},\tilde{z}_q) - 1)\,M(z_{q-1},z_q))\}f\|_j$$

$$\leq \{\sum_{q=1}^{n} (m(z_{q-1},z_q) - 1) - a(s,t)\}\,\|f\|_{j+2}$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} \gamma_T(z_{q-1},\tilde{z}_q)\,\gamma_M(z_{q-1},z_q)\|f\|_{j+2}$$

$$\leq \{\sum_{q=1}^{n} (m(z_{q-1},z_q) - 1) - a(s,t)\}\,\|f\|_{j+2}$$

$$+ \max_{z\in Z} \gamma_T(z_{q-1},\tilde{z}_q)\,\gamma_M(s,t)\|f\|_{j+2}.$$

Für eine hinreichend feine Unterteilung Z von $[s,t]$ ist aber der letzte Ausdruck nach α) und auf Grund der Stetigkeit von γ_T beliebig klein. Also konvergiert

$(\sum_{z_q\in Z} T(\tilde{z}_q,t)M(z_{q-1},z_q))_{Z\in\mathfrak{Z}(s,t)}$ gegen $T(s,t) - 1$ in der Operator-Norm von $\mathcal{L}(E_{j+2},E_j)$ $(j\in\mathbb{Z}_+)$. Wegen

$$\|\sum_{z_q\in Z} T(\tilde{z}_q,t)M(z_{q-1},z_q)\,f\|_k \leq \gamma_M(s,t)\|f\|_{k+1} \text{ für } Z\in\mathfrak{Z}(s,t)$$

ist das betrachtete Netz von Operatoren als Teilmenge von $\mathcal{L}(E_{j+1},E_j)$ punktweise beschränkt und auf der in E_{j+1} dichten Teilmenge E_{j+2} konvergent. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus liegt punktweise Konvergenz des Netzes als Teilmenge von $\mathcal{L}(E_{j+1},E_j)$ vor $(j\in\mathbb{Z}_+)$. □

Bezüglich der Charakterisierung mit Hilfe der Evolutionsgleichungen im Sinne eines operatorwertigen Riemann-Stielt-

Stieltjes-Integral ist die Klasse der Hemigruppen von beschränkter Variation maximal.

8.10 Korollar: Seien $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ eine Faltungshemigruppe auf G und T die zugehörige Evolutionsfamilie. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

(i) $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ ist von beschränkter Variation.

(ii) Es existiert eine auf $((\overleftarrow{C}_{2k}(G),\|\cdot\|_{2k}^{\leftarrow}))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ additive und m-dissipative Operatorfamilie M, so daß $(T(s,t) - 1)f = \int_s^t M(du)T(s,u)f$ für alle $(s,t)\in D$ und $f\in \overleftarrow{C}_2(G)$ im Sinn von 8.8 (*) gilt.

(iii) Es existiert eine auf $((\overleftarrow{C}_{2k}(G),\|\cdot\|_{2k}^{\leftarrow}))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ additive und m-dissipative Operatorfamilie M, so daß $(T(s,t) - 1)f = \int_s^t T(u,t)M(du)f$ für alle $(s,t)\in D$ und $f\in \overleftarrow{C}_2(G)$ im Sinn von 8.8 (*) gilt.

Beweis: "(ii) ⇒ (i)": Ist γ_M die zu M gehörige stetige additive Funktion und $v(t) := \gamma_M(o,t)$ für $t\in\mathbb{R}_+$ gesetzt, so gilt

$$\Big\|\sum_{z_q\in Z} M(z_{q-1},z_q)T(s,z_q)f\Big\|_o \leq (v(t) - v(s))\,\|f\|_2^{\leftarrow}$$

für alle $(s,t)\in D$, $f\in \overleftarrow{C}_2(G)$ und $Z\in \mathfrak{Z}(s,t)$. Grenzwertbildung entlang $\mathfrak{Z}(s,t)$ führt zur Aussage (i).
Die Implikation "(iii) ⇒ (i)" folgt analog, alle anderen Aussagen gelten nach 8.8 und 8.9. □

Für jede additive Operatorfamilie $(W(s,t))_{(s,t)\in D}$ definiert $W(t) := W(o,t)$ für $t\in\mathbb{R}_+$ die zugehörige einparametrige Operatorfamilie. Im Hinblick auf Paragraph 9 sollen hier

die wichtigsten Eigenschaften der zu der Generatorfamilie $(M(s,t))_{(s,t)\in D}$ aus Satz 8.8 gehörigen einparametrigen Generatorfamilie $(M(t))_{t\geq 0}$ vorgestellt werden.

8.11 Korollar: Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gelten folgende Aussagen.

a) $M(t)$ ist aus $\mathcal{L}((\overleftarrow{C}_2(G), \|\cdot\|_2^{\leftarrow}), (C_o(G), \|\cdot\|_o))$.

b) $M(t)$ ist Generator einer Kontraktionshalbgruppe auf $C_o(G)$.

c) Für alle $x \in G$ gelten $L_x(D(M(t))) \subseteq D(M(t))$ sowie $M(t)L_x f = L_x M(t)f$ für alle $f \in D(M(t))$.

d) Es existiert eine stetige isotone Funktion $v: D \to \mathbb{R}$ mit $\|M(t) - M(s)\|_{2,0}^{\leftarrow} \leq v(t) - v(s)$ für alle $(s,t) \in D$.

Beweis: Die Aussagen a) und d) sind direkte Konsequenzen aus 8.8 sowie 8.6 b). Man hat nur $v(t) := \gamma_M(0,t)$ für $t \in \mathbb{R}_+$ und die zu M nach 8.6 b) gehörige stetige additive (und positive) Funktion γ_M zu setzen. Als m-dissipativer Operator ist $M(s,t)$ auf $C_o(G)$ dicht definiert und dissipativ und daher Generator einer Kontraktionshalbgruppe auf $C_o(G)$ ([20], IX.8). Somit gilt auch b).

Sind $t \in \mathbb{R}_+$ und f aus $D(M(t))$ und konvergiert

$$\left(\sum_{z_j \in Z} (T(z_{j-1}, z_j) - 1)f\right)_{Z \in \mathfrak{Z}(o,t)},$$

so ist auch

$$\left(\sum_{z_j \in Z} (T(z_{j-1}, z_j) - 1)L_x f\right)_{Z \in \mathfrak{Z}(o,t)}$$

$$= \left(L_x \sum_{z_j \in Z} (T(z_{j-1}, z_j) - 1)f\right)_{Z \in \mathfrak{Z}(o,t)}$$

ein Cauchy-Netz in $C_o(G)$ und daher konvergent.

Aussage c) folgt damit aus 8.8 (**). □

Abschließend soll für die einer Hemigruppe von beschränkter Variation zugeordnete (einparametrige) Generatorfamilie eine Lévy-Hinčin-Darstellung wie in Paragraph 7 gefunden werden. Dies gelingt aber in vollständiger Weise nur für die Familie der erzeugenden Funktionale.

8.12 Lemma: Es seien $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ eine Hemigruppe von beschränkter Variation und M die nach Satz 8.8 zugehörige einparametrige Generatorfamilie. Für alle $t\in\mathbb{R}_+$ und f aus D(M(t)) sei $A(t)f := M(t)f(e)$.
Dann gelten folgende Aussagen:

a) Für alle $t\in\mathbb{R}_+$ ist A(t) ein lineares Funktional auf $D(M(t)) \supseteq \overleftarrow{C}_2(G)$. Es existiert eine stetige isotone Funktion $v: D \to \mathbb{R}$ mit
$|\{A(t) - A(s)\}(f)| \leq (v(t) - v(s))\|f\|_2^{\leftarrow}$
für alle $(s,t)\in D$ und $f\in \overleftarrow{C}_2(G)$.

b) Für alle $t\in\mathbb{R}_+$ ist A(t) fast positiv und normiert auf $\overleftarrow{C}_2(G)$ und damit auf $\mathcal{D}(G)$. Daher ist A(t) die Einschränkung auf $\overleftarrow{C}_2(G)$ des erzeugenden Funktionals einer Faltungshalbgruppe auf G und gestattet eine Lévy-Hinčin-Darstellung nach 7.17.

Beweis: Die Aussage a) folgt aus den entsprechenden Aussagen von 8.8 und 8.9.
Für den Beweis von b) sei T die zu $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ gehörige Kontraktionshalbgruppe. Für alle $t\in\mathbb{R}_+$ und $f\in \overleftarrow{C}_2(G)_+$ mit $f(e) = o$ gilt
$(T(o,t) - 1)f(e) = \int_o^t (f(y) - f(e))\,\mu(o,t)(dy) \geq o.$

Durch Summation und Grenzwertbildung überträgt sich dies auf den Operator $M(o,t) = \int_o^t (T(du) - 1)$. Also ist $A(t)$ fast positiv.

Für die Normiertheit von $A(t)$ ist daher nur noch zu zeigen, daß $\sup_{K \in \mathfrak{K}} A(t)(f_K) = o$ für das in 4.10 konstruierte Netz $(f_K)_{K \in \mathfrak{K}}$ aus $\mathcal{D}(G)_+$ gilt.

Sei $K \in \mathfrak{K}$. Wegen 8.8 (**) läßt sich $M(o,t)$ und damit auch $A(t)$ eindeutig unter Erhaltung aller Eigenschaften durch 0 auf $\overleftarrow{C}_2(G) + \mathbb{R} \cdot 1_G$ fortsetzen (vgl. 7.20). Dies sei so geschehen. Da $A(t)$ fast positiv ist, gilt $o \leq A(t)(1 - f_K) = - A(t)(f_K)$. Mit den Bezeichnungen von Beweisteil α) von 8.9 haben wir

$$(T(o,t) - 1)f_K(e) - A(t)(f_K) \leq (m(o,t) - 1 - a(o,t))\|f_K\|_4^{\leftarrow}$$

für die multiplikative Funktion $m: D \to \mathbb{R}$ und die additive Funktion $a: D \to \mathbb{R}$ und alle $K \in \mathfrak{K}$.

Das Netz $(f_K)_{K \in \mathfrak{K}}$ sei so gewählt, daß $\sup_{K \in \mathfrak{K}} \|f_K\|_4^{\leftarrow} = c < \infty$ gilt. Für $Z \in \mathfrak{Z}(s,t)$ erhält man dann

$$\begin{aligned} o \geq A(t)(f_K) &= \sum_{z_q \in Z} A(z_{q-1}, z_q)(f_K) \\ &\geq \sum_{z_q \in Z} (T(z_{q-1}, z_q) - 1)f_K(e) \\ &\quad - c\Big(\sum_{z_q \in Z} (m(z_{q-1}, z_q) - 1) - a(s,t)\Big). \end{aligned}$$

Für hinreichend feines Z ist der Faktor von c klein nach dem Zitat in Beweisteil α) von 8.9. Das zu $T(z_{k-1}, z_k)$ gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß ist ein Radon-Maß. Wählt man K hinreichend groß, so wird daher auch die (endliche) Summe klein. □

§ 9 Die Erzeugung von Faltungshemigruppen

Im folgenden wird zu einer vorgegebenen Generatorfamilie $N = (N(t))_{t\geq 0}$ eine Faltungshemigruppe $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ konstruiert, welche die Evolutionsgleichungen

$T_{\mu(s,t)}f - f = \int_s^t T_{\mu(u,t)}N(u)f\,du$ und

$T_{\mu(s,t)}f - f = \int_s^t N(u)T_{\mu(s,u)}f\,du$

für alle $f\in \overleftarrow{C}_2(G)$ erfüllt. Dazu verallgemeinern wir eine von HEYER [14] angegebene operatorentheoretische Konstruktion. Unter den in [14] angegebenen Bedingungen sind diese Hemigruppen im starken Sinn differenzierbar für alle $(s,t)\in D$. Die Ergebnisse werden sich auch auf die in Paragraph 8 betrachteten Generatorfamilien anwenden lassen.

9.1 Satz: Es sei eine Familie $N = (N(t),D(N(t)))_{t\geq 0}$ aus $L(C_0(G),C_0(G))$ gegeben, welche folgende Eigenschaften besitzt:

(G1) Für alle $t\in\mathbb{R}_+$ gelten $\overleftarrow{C}_2(G)\subseteq D(N(t))$ und $\mathrm{Res}(\overleftarrow{C}_2(G),N(t))\in\mathcal{L}(\overleftarrow{C}_2(G),C_0(G))$.

(G2) Für alle $t\in\mathbb{R}_+$ ist $\mathrm{Res}(\mathcal{D}(G),N(t))$ die Einschränkung auf $\mathcal{D}(G)$ des Generators einer Faltungshalbgruppe auf G.

(G3) Die Abbildung $(s,t)\mapsto \|N(t) - N(s)\|_{2,0}^{\leftarrow}$ ist von beschränkter Variation auf D (vgl. 8.1).

Dann gelten folgende Aussagen:

a) Es existiert genau eine Faltungshemigruppe $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ auf G, für die

$$T_{\mu(s,t)}f - f = \int_s^t N(u)T_{\mu(s,u)}f\,du$$

für alle $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$ und $(s,t) \in D$ im Sinn eines $C_o(G)$-wertigen Bochner-Integrals gilt.

b) Es existiert genau eine Faltungshemigruppe $(\mu'(s,t))_{(s,t)\in D}$ auf G, für die

$$T_{\mu'(s,t)}f - f = \int_s^t T_{\mu'(u,t)}N(u)f \, du$$

für alle $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$ und $(s,t) \in D$ im Sinn eines $C_o(G)$-wertigen Bochner-Integrals gilt.

c) Es gilt $\mu'(s,t) = \mu(s,t)$ für alle $(s,t) \in D$.

d) Die Hemigruppe $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ ist von beschränkter Variation (vgl. 8.1).

9.2 Bemerkung: a) Die Abbildung $(s,t) \mapsto \|N(t) - N(s)\|_{2,0}^{\leftarrow}$ ist von beschränkter Variation genau dann, wenn $\sup_{Z\in\mathfrak{Z}(s,t)} \sum_{z_j \in Z} \|N(z_{j+1}) - N(z_j)\|_{2,0}^{\leftarrow}$ endlich ist für alle $(s,t) \in D$. Die durch

$$v(t) := \sup_{Z\in\mathfrak{Z}(o,t)} \sum_{z_j \in Z} \|N(z_{j+1}) - N(z_j)\|_{2,0}^{\leftarrow}$$

definierte Funktion $v:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ist isoton. Es gilt $\|\{N(t) - N(s)\}f\|_o \leq (v(t) - v(s))\|f\|_2^{\leftarrow}$ für alle $(s,t) \in D$ und $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$.

b) Auf Grund von (G1) ist die Abbildung $u \mapsto \|N(u)\|_{2,0}^{\leftarrow}$ beschränkt auf kompakten Intervallen von $\mathbb{R}_+$.

c) Die Forderung (G3) ist etwas schwächer als die Forderung der Lipschitzstetigkeit der entsprechenden Abbildung in [14], 4.19.

Der Beweis des Satzes wird in mehreren Schritten geführt. Es gelten stets die Voraussetzungen und Bezeichnungen des Satzes.

9.3 Proposition: Für $t \in \mathbb{R}_+$ sei $T_t := (T_t(s))_{s \geq o}$ die Kontraktionshalbgruppe der zu $N(t)$ gehörenden (eindeutig bestimmten) Faltungshalbgruppe. Dann gilt $D(N(t)) \supseteq \bigcup_{x \in G} L_x(\overleftarrow{C}_2(G))$. Ferner gilt

$$T_t(s)f - f = \int_o^s T_t(u)N(t)f \, du = \int_o^s N(t)T_t(u)f \, du$$

für alle $s,t \in \mathbb{R}_+$ und $f \in D(N(t))$.

Beweis: Die erste Aussage folgt aus (G1) analog zu 7.18 und 6.7. Die Gültigkeit der Integralgleichungen wird in der Hille-Yosida-Theorie bewiesen ([20], p. 239). □

$\mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ sei eine Filterbasis endlicher Unterteilungen von $\mathbb{R}_+$ in dem Sinn, daß sowohl $|Z|$ als auch $(\max_{z \in Z} z)^{-1}$ entlang der Ordnung von $\mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ gegen o gehen. Da die mit $\mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ indizierten Netze stets Werte in Banachräumen annehmen werden, können wir ohne Einschränkung etwa die Folge der Unterteilungen $Z_n := \{j/n: j=o,1,..,n^2\}$, $n \in \mathbb{N}$, von $\mathbb{R}_+$ betrachten.

Für $Z := \{o=z_o < z_1 < \ldots < z_n\} \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ definieren wir die Operatoren $N^Z(t)$ für $t \in \mathbb{R}_+$ durch

$$N^Z(t) := \sum_{j=o}^{n-1} N(z_j) \, 1_{[z_j, z_{j+1}[}(t).$$

Die Operatoren $T^Z(s,t)$ werden für $(s,t) \in D$ definiert durch

$$T^Z(s,t) := T_{z_{j-1}}(t-z_{j-1}) \, T_{z_{j-2}}(z_{j-1}-z_{j-2}) \cdot \cdot \cdot \cdot T_{z_k}(z_{k+1}-z_k) \, T_{z_{k-1}}(z_k - s),$$

falls $z_{k-1} \leq s < z_k \leq \ldots < z_{j-1} \leq t$ erfüllt ist, und

$T^Z(s,t) := 1$, falls $z_n \leq s$ gilt.

9.4 Proposition: Für alle $f \in \overset{\leftarrow}{C}_2(G)$ ist die Abbildung $u \mapsto N(u)f$ von $\mathbb{R}_+$ nach $C_o(G)$ stark meßbar und lokal (d. h. über jedes kompakte Intervall von $\mathbb{R}_+$) Bochner-integrierbar.

Es gilt $\lim_{Z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)} \|N^Z(u) - N(u)\|_{2,o}^{\leftarrow} = o$ für fast alle $u \in \mathbb{R}_+$

und $\lim_{Z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)} \int_s^t \|N^Z(u) - N(u)\|_{2,o}^{\leftarrow} du = o$ für alle $(s,t) \in D$.

Beweis: Für alle $Z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ und jedes $f \in \overset{\leftarrow}{C}_2(G)$ besitzt die Abbildung $u \mapsto N(u)f$ einen endlichen Wertebereich. Nach [20], V.5 folgt daher die erste Aussage aus der zweiten. Für die in 9.2 definierte Funktion v und $u \in \mathbb{R}_+$ sowie für jede hinreichend feine Unterteilung $Z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ gilt $\|N^Z(u)f - N(u)f\|_o = \|N(z_j)f - N(u)f\|_o \leq (v(u) - v(z_j))\|f\|_2^{\leftarrow}$ mit $|u - z_j| \leq |Z|$. Die Funktion v ist isoton und daher fast überall stetig. Ist u aus der Menge der Stetigkeitspunkte von v, so gilt $\lim_{Z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)} \min\{ v(u) - v(z) : z \in Z, z < u\} = o$.

Somit ist die erste Grenzwertaussage gezeigt. Es folgt die starke Meßbarkeit der Abbildungen $u \mapsto N(u)f$ und $u \mapsto \|N^Z(u)f - N(u)f\|_o$ ([20], V.5, V.4). Für alle $(s,t) \in D$ und $f \in \overset{\leftarrow}{C}_2(G)$ sowie für jede hinreichend feine Unterteilung $Z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ gilt nun

$$\int_s^t \|(N^Z(u) - N(u))f\|_o \, du$$

$$= \sum_{z_j \in Z} \int_{s \vee z_j}^{t \wedge z_{j+1}} \|(N(z_j) - N(u))f\|_o \, du$$

$$\leq \|f\|_2^{\leftarrow} \sum_{z_j \in Z} (v(z_{j+1}) - v(z_j))(t \wedge z_{j+1} - s \vee z_j)$$

$$\leq \|f\|_2^{\leftarrow} |Z| \, (v(t) - v(s)).$$

Dies impliziert die zweite Grenzwertaussage. □

9.5 Lemma: T^Z ist eine Familie von positiven Kontraktionen auf $C_o(G)$. Es gilt

$$(T^Z(s,t) - 1)f = \int_s^t N^Z(u)T^Z(s,u)f\,du = \int_s^t T^Z(u,t)N^Z(u)f\,du$$

für alle $(s,t) \in D$ und $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$ und jedes $Z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$.

Beweis: Die erste Behauptung gilt offensichtlich. Mit Hilfe der Integralgleichungen aus 9.3 erhalten wir für $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$ und alle $Z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ mit $s < \max_{z \in Z} z$ mit den in der Definition von T^Z verwendeten Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
&(T^Z(s,t) - 1)f \\
&= (T_{z_{j-1}}(t-z_{j-1}) - 1)T_{z_{j-2}}(z_{j-1}-z_{j-2}) \cdots T_{z_{k-1}}(z_k-s) \\
&\quad + (T_{z_{j-2}}(z_{j-1}-z_{j-2}) - 1)T_{z_{j-3}}(z_{j-2}-z_{j-3}) \cdots T_{z_{k-1}}(z_k-s)f \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + (T_{z_{k-1}}(z_k-s) - 1)f \\
&= \int_{z_{j-1}}^{t} N(z_{j-1})T_{z_{j-1}}(v-z_{j-1}) \cdots T_{z_{k-1}}(z_k-s)f\,dv \\
&\quad + \int_{z_{j-2}}^{z_{j-1}} N(z_{j-2})T_{z_{j-2}}(v-z_{j-2}) \cdots T_{z_{k-1}}(z_k-s)f\,dv \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \int_{s}^{z_k} N(z_{k-1})T_{z_{k-1}}(v-s)f\,dv \\
&= \int_s^t N^Z(v)\,T^Z(s,v)f\,dv.
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ergibt sich völlig analog durch Aufspaltung von $(T^Z(s,t) - 1)$ von rechts. Für alle anderen $Z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ gelten die Gleichungen trivialerweise. □

9.6 Lemma: Für alle $Z,Z' \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}_+)$, $(s,t) \in D$ und $f \in \overset{+}{C}_2(G)$ gilt

$$(T^{Z'}(s,t) - T^{Z}(s,t))f$$
$$= \int_s^t T^{Z}(u,t)(N^{Z}(u) - N^{Z'}(u))T^{Z'}(s,u)f \, du.$$

Daher existiert $T(s,t)f := \|\cdot\|_o\text{-}\lim_{Z \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}_+)} T^{Z}(s,t)$ für alle $f \in \overset{+}{C}_o(G)$, und zwar gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von D. Jedes $T(s,t)$ ist eine positive Kontraktion auf $C_o(G)$ $((s,t) \in D)$.

Beweis: Die erste Gleichung ist bereits in [14], 4.13 angegeben und folgt aus den Gleichungen von 9.5 mit Hilfe einer längeren algebraischen Rechnung. Dabei ist für $T^{Z'}$ nur die Gültigkeit der Vorwärtsevolutionsgleichung, für T^{Z} nur die der Rückwärtsevolutionsgleichung erforderlich.
Der zweite Teil der Aussage folgt dann aus der Abschätzung

$$\|(T^{Z'}(s,t) - T^{Z}(s,t))f\|_o$$
$$\leq \int_s^t \|T^{Z}(u,t)(N^{Z}(u) - N^{Z'}(u))T^{Z'}(s,u)f\|_o \, du$$
$$\leq \|f\|_2^+ \int_s^t \|N^{Z}(u) - N^{Z'}(u)\|_{2,0}^+ \, du$$

zusammen mit 9.4, und zwar zuerst für alle $f \in \overset{+}{C}_2(G)$ und auf Grund der Kontraktivität der Operatoren $T^{Z}(s,t)$ dann auch für alle $f \in C_o(G)$. Als Grenzwert von positiven Kontraktionen ist $T(s,t)$ wieder eine positive Kontraktion. □

9.7 Lemma: Für alle $(s,t) \in D$ und $f \in \overset{+}{C}_2(G)$ gilt

$$(T(s,t) - 1)f = \int_s^t N(u)T(s,u)f \, du = \int_s^t T(u,t)N(u)f \, du.$$

Dabei handelt es sich um Bochner-Integrale.

Beweis: α) Wir zeigen zunächst die starkte Meßbarkeit der Abbildung $u \mapsto N(u)T(s,u)f$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$ und $f \in \overset{+}{C}_2(G)$.

Seien $s \in \mathbb{R}_+$ und $f \in \overset{+}{C}_2(G)$ fest gewählt. Für alle $Z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ setzen wir $\tilde{T}^Z(s,t) := \sum_{z_j \in Z} T(s,z_j)\, 1_{[z_j, z_{j+1}[}(t)$. Auf Grund der Stetigkeit von T nach 9.6 konvergiert $\tilde{T}^Z(s,u)f$ entlang $\mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ gegen $T(s,u)f$ für alle $u \geq s$. Die Abbildung $u \mapsto N^Z(u)\tilde{T}^Z(s,u)f$ nimmmt nur endlich viele Werte an. Es gilt

$$\|N^Z(u)\tilde{T}^Z(s,u)f - N(u)T(s,u)f\|_o \leq$$
$$\|N^Z(u) - N(u)\|^{\overset{+}{}}_{2,0} \|\tilde{T}^Z(s,u)f\|^{\overset{+}{}}_2 + \|N(u)\|^{\overset{+}{}}_{2,0} \|(\tilde{T}^Z(s,u) - T(s,u))f\|^{\overset{+}{}}_2.$$

Der erste Summand der Summe konvergiert nach 9.4 fast überall gegen o. Aber auch $\|(\tilde{T}^Z(s,u) - T(s,u))f\|^{\overset{+}{}}_2$ konvergiert entlang $\mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ gegen o für alle $(s,u) \in D$.

⌈Für jedes $\varepsilon > o$ existiert ein $J \in \mathfrak{F}(I^2)$ mit $\sum_{\alpha \notin J} \|\overset{+}{X}_\alpha f\|_o < \varepsilon/4$. Da die $T(s,t)$ Wahrscheinlichkeitsoperatoren sind, vertauschen sie mit der linksseitigen Ableitung (4.3 e)). Auf Grund der Stetigkeit von T läßt sich ein $\delta > o$ finden mit

$\|(\tilde{T}^Z(s,u) - T(s,u))\overset{+}{X} f\|_o \leq \varepsilon/4|J|$ sowie

$\|(\tilde{T}^Z(s,u) - T(s,u))f\|_o \leq \varepsilon/2$

für alle $Z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ mit $|Z| < \delta$ und alle $\alpha \in J$. Wir erhalten

$$\|(\tilde{T}^Z(s,u) - T(s,u))f\|^{\overset{+}{}}_2$$
$$\leq \|(\tilde{T}^Z(s,u) - T(s,u))f\|_o$$
$$+ \sum_{\alpha \in J} \|(\tilde{T}^Z(s,u) - T(s,u))\overset{+}{X}_\alpha f\|_o$$
$$+ 2 \sum_{\alpha \notin J} \|X_\alpha f\|_o$$
$$\leq \varepsilon .$$ ⌋

Also ist die Abbildung $u \mapsto N(u)T(s,u)f$ stark meßbar. Auf gleiche Weise zeigt man die starke Meßbarkeit der Abbildung $u \mapsto T(u,t)N(u)f$.

β) Die Abbildung $u \mapsto N(u)T(s,u)f$ ist lokal Bochner-integrierbar genau dann, wenn $u \mapsto \|N(u)T(s,u)f\|_o$ integrierbar ist ([20], V.5.1). Für alle $(s,t) \in D$ ist aber

$$\int_s^t \|N(u)T(s,u)f\|_o du \leq \int_s^t \|N(u)\|^+_{2,0} du \, \|f\|^+_2$$

endlich nach 9.2 und 9.4. Die entsprechende Aussage für die Abbildung $u \mapsto T(u,t)N(u)f$ zeigt man analog.

Da die Integrale aus 9.5 ebenfalls Bochner-Integrale sind, haben wir

$$\|(T(s,t) - 1)f - \int_s^t N(u)T(s,u)f \, du\|_o$$
$$\leq \|(T(s,t) - T^Z(s,t)f\|_0 + \int_s^t \|N^Z(u) - N(u)\|^+_{2,0} \, du \, \|f\|^+_2$$

für alle $(s,t) \in D$, $f \in \overset{+}{C}_2(G)$ und $Z \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}_+)$.

Die Gültigkeit der ersten Gleichung der Proposition folgt damit aus 9.4 und 9.6, die zweite wird analog gezeigt. □

9.8 Proposition: $T := (T(s,t))_{(s,t)\in D}$ ist eine Evolutionsfamilie. Es existiert eine Faltungshemigruppe $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ auf G mit $T(s,t) = T_{\mu(s,t)}$ für alle $(s,t) \in D$.

Beweis: α) Für alle $Z \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}_+)$, $z_j \in Z$ und $t \in [z_j, z_{j+1}[$ gilt $T^Z(t,t) = T_{z_j}(z_{j+1} - z_j)$ und daher $T(t,t) = 1$, also (E1).

Für alle $f \in \overset{+}{C}_2(G)$, $s \in \mathbb{R}_+$ und $u, v \in \mathbb{R}_+$ mit $o \leq s-u$ haben wir

$$\|(T^Z(s-u,s+v) - 1)f\|_o \leq \int_{s-u}^{s+v} \|N^Z(t)T^Z(s,t)f\|^+_o \, dt$$
$$\leq \max_{z_j \in [s-u,s+v]} \|N^Z(z_j)\|^+_{2,0} \, (v + u) \, \|f\|^+_2$$
$$\leq \max_{t \in [s-u,s+v]} \|N(t)\|^+_{2,0} \, (v + u) \, \|f\|^+_2.$$

Der letzte Ausdruck ist endlich nach 9.2 b). Also erfüllt

T^Z die Bedingung (E2). Auf Grund der Gleichmäßigkeit der Konvergenz überträgt sich die Stetigkeit auf T.
Für eine hinreichend feine Unterteilung $Z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ erfüllt bereits T^Z die Bedingung (E3). Auch dies überträgt sich nach 9.6 auf T.

β) Nach Lemma 9.6 ist T eine Familie von positiven Kontraktionen auf $C_o(G)$ mit $L_x T(s,t) = T(s,t)L_x$ für alle $x \in G$ und $(s,t) \in D$. Nach dem Satz von Riesz existiert genau eine Familie $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ von positiven und kontraktiven Maßen auf G mit $\mu(t,t) = \varepsilon_e$, $\mu(s,t) * \mu(r,s) = \mu(r,t)$ und $T_{\mu(s,t)} = T(s,t)$ für alle $(r,s),(s,t) \in D$. Somit sind (H1) und (H3) erfüllt.
Es sind also nur noch (H2) und $\mu(s,t)(G) = 1$ für alle $(s,t)\in D$ zu zeigen. Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ ist aber N(t) Generator einer Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf G. Nach 7.20 gilt $\mathbb{R}\cdot 1_G \subseteq D(N(t))$ und $N(t)(c\cdot 1_G) = 0$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Daher gelten alle Aussagen von 9.3 beginnend in entsprechender Weise für den Raum $\overset{\leftarrow}{C}_2(G) + \mathbb{R}\cdot 1_G$. Insbesondere haben wir für $c \in \mathbb{R}^*$ daher

$$T_{\mu(s,t)}(c\cdot 1_G) - c\cdot 1_G = \int_s^t T_{\mu(u,t)} N(u)(c\cdot 1_G)\, du = o$$

und daher $\mu(s,t)(G) = 1$. Nun folgt (H2) aus (E2) bzw. α) gemäß [13], 1.5.5. □

9.9 Lemma: a) T ist die einzige Evolutionsfamilie auf $C_o(G)$ mit $(T(s,t) - 1)f = \int_s^t N(u)T(s,u)f\, du$ für alle $f \in \overset{\leftarrow}{C}_2(G)$ und $(s,t) \in D$.

b) T ist die einzige Evolutionsfamilie auf $C_o(G)$ mit $(T(s,t) - 1)f = \int_s^t T(u,t)N(u)f\,du$ für alle $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$ und $(s,t) \in D$.

In diesem Sinn ist auch die zu T nach 9.7 gehörige Faltungshemigruppe durch N eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei S eine weitere Evolutionsfamilie, welche die Integralgleichung von a) löst. Für alle $Z \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}_+)$ ist T^Z Lösung beider Integralgleichungen von 9.5. Analog zu 9.6 erhält man die Gleichung

$$(S(s,t) - T^Z(s,t))f = \int_s^t T^Z(u,t)(N^Z(u) - N(u))S(s,u)f\,du$$

für alle $(s,t) \in D$ und $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$. Daraus folgt Behauptung a) nach 9.6. Aussage b) wird analog gezeigt. □

9.10 Korollar: Die Hemigruppe $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ ist von beschränkter Variation.

Beweis: Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ sei $w(t) := \int_o^t \|N(u)\|_{2,o}^{\leftarrow} du$. Die Abbildung $w: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist isoton und stetig. Für $(s,t) \in D$ und $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$ gilt nach 9.9 offensichtlich

$$\|(T_{\mu(s,t)} - 1)f\|_o \leq \|f\|_2^{\leftarrow} (w(t) - w(s)).$$ □

Damit ist der Satz 9.1 vollständig bewiesen. Für seine Anwendung ist es günstig, folgende Verschärfung von (G3) zu betrachten:

(G3') Die Abbildung $(s,t) \mapsto \|N(t) - N(s)\|_{2,o}^{\leftarrow}$ ist stetig auf der Diagonale von D und von beschränkter Variation.

9.11 Proposition: Für eine der Bedingung (G1) genügende Generatorfamilie $N = (N(t))_{t\geq 0}$ sind folgende Aussagen gleichwertig.

(i) N genügt der Bedingung (G3').

(ii) Die Funktion v aus 9.2 ist (isoton und) stetig.

Beweis: Es ist nur die Implikation "(i) $\Rightarrow$ (ii)" und hier nur etwa die linksseitige Stetigkeit von v in jedem Punkt s aus $\mathbb{R}_+$ zu zeigen.

Aus der Stetigkeit der Abbildung $(s,t) \mapsto \|N(t) - N(s)\|^{+}_{2,0}$ auf der Diagonalen folgt die Stetigkeit der Abbildung $u \mapsto N(u)f$ von $\mathbb{R}_+$ in $C_0(G)$ für alle $f \in \overset{+}{C}_2(G)$. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert nun ein Z: $0=z_0 < z_1 < \ldots < z_n=s$ aus $\mathfrak{Z}(0,s)$ mit

$$v(s) < \sum_{j=1}^{n} \|N(z_j) - N(z_{j-1})\|^{+}_{2,0} + \varepsilon/2.$$

Nun kann Z zusätzlich so gewählt werden, daß auch $\|N(z_{n-1}) - N(z_n)\|_{2,0} < \varepsilon/2$ erfüllt ist. Für alle $x \in [z_{n-1}, s]$ gilt dann

$$v(x) \geq v(z_{n-1}) \geq \sum_{j=1}^{n-1} \|N(z_j) - N(z_{j-1})\|^{+}_{2,0}$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} \|N(z_j) - N(z_{j-1})\|^{+}_{2,0} - \varepsilon/2 > v(s) - \varepsilon.$$

Die linksseitige Stetigkeit von v folgt nun aus der Isotonie von v. □

Die zu N gehörige Hemigruppe ist nun im starken Sinn fast überall differenzierbar.

9.12 Korollar: Die Faltungshemigruppe $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ ist im starken Sinn auf $\overleftarrow{C}_2(G)$ fast überall differenzierbar, d. h., für fast alle $(s,t)\in D$ und alle $f\in\overleftarrow{C}_2(G)$ existieren

$$\frac{\partial^+}{\partial t}T_{\mu(s,t)}f := \|\cdot\|_o\text{-}\lim_{h\downarrow o}\frac{1}{h}\{T_{\mu(s,t+h)}f - T_{\mu(s,t)}f\}$$

und

$$\frac{\partial^-}{\partial s}T_{\mu(s,t)}f := \|\cdot\|_o\text{-}\lim_{h\downarrow o}\frac{1}{-h}\{T_{\mu(s-h,t)}f - T_{\mu(s,t)}f\};$$

es gelten $\frac{\partial^+}{\partial t}T_{\mu(s,t)}f = N(t)T_{\mu(s,t)}f$

und $\frac{\partial^-}{\partial s}T_{\mu(s,t)}f = -T_{\mu(s,t)}N(s)f$.

Genügt die Generatorfamilie der Bedingung (G3'), so gilt diese Aussage für alle $(s,t)\in D$.

Beweis: Es reicht, die Existenz der partiellen Ableitungen sowie die angegebene Gleichung für (fast) alle Punkte (s,s) der Diagonalen $\{(s,s):s\in\mathbb{R}_+\}$ von D zu zeigen ([14], 4.10). Dazu seien die Abbildungen v nach 9.2 und w nach 9.10 definiert und $T(s,t) := T_{\mu(s,t)}$ für $(s,t)\in D$ gesetzt.

α) Für alle $f\in\overleftarrow{C}_4(G)$ und $(s,t)\in D$ gilt $\|T(s,t)f - f\|_2^+ \le 3(w(t)-w(s))\|f\|_4^+$ gemäß 9.10 und 8.5 (vgl. den Beweis von 8.7). Nach 9.3 ist N(t) Generator einer Kontraktionshalbgruppe T_t auf $C_o(G)$ mit $\overleftarrow{C}_2(G)\subset D(N(t))$. Für Vektoren X_i, X_j der projektiven Basis von $\mathcal{L}(G)$ ist nun $\overleftarrow{X}_i\overleftarrow{X}_j f\in\overleftarrow{C}_2(G)$. Geht h gegen o, so konvergiert $\overleftarrow{X}_i\overleftarrow{X}_j(h^{-1}\{T_t(h)f - f\}) = h^{-1}\{T_t(h)\overleftarrow{X}_i\overleftarrow{X}_j f - \overleftarrow{X}_i\overleftarrow{X}_j f\}$ gegen $N(t)\overleftarrow{X}_i\overleftarrow{X}_j f$. Da $h^{-1}\{T_t(h)f - f\}$ gegen $N(t)f$ konvergiert,

folgt $N(t)\overleftarrow{X}_i\overleftarrow{X}_j f = \overleftarrow{X}_i\overleftarrow{X}_j N(t)f$. Daher impliziert (G3) die Abschätzung $\|(N(t)-N(s))f\|_2^{\leftarrow} \leq 3(v(t) - v(s))\|f\|_4^{\leftarrow}$ für alle f aus $\overleftarrow{C}_4(G)$ und $(s,t) \in D$.

β) Für $f \in \overleftarrow{C}_4(G)$ und $s \in \mathbb{R}_+$ sowie $h \in \mathbb{R}_+^*$ erhalten wir nach 9.7 und 9.10 folgende Abschätzung.

$$\|\tfrac{1}{h}\{T(s,s+h)f - f\} - N(s)f\|_0$$

$$= \|\tfrac{1}{h}\int_s^{s+h}\{N(u)T(s,u)f - N(s)f\}du\|_0$$

$$= \|\tfrac{1}{h}\int_s^{s+h}\{(N(u) - N(s))f + N(u)(T(s,u)f - f)\}du\|_0$$

$$\leq \tfrac{1}{h}\{\int_s^{s+h}(v(u) - v(s))du\}\|f\|_2^{\leftarrow}$$

$$+ \tfrac{1}{h}\{\int_s^{s+h}(w(u) - w(s))du\}\ 3\sup_{0\leq u\leq h}\|N(s+u)\|_{2,0}^{\leftarrow}\|f\|_4^{\leftarrow}.$$

Analog gilt

$$\|\tfrac{1}{-h}\{T(s-h,s)f - f\} + N(s)f\|_0$$

$$= \|\tfrac{1}{h}\int_{s-h}^{s}\{N(s)f - T(u,s)N(u)f\}du\|_0$$

$$= \|\tfrac{1}{h}\int_{s-h}^{s}\{(N(s) - N(u))f + (1 - T(u,s))N(u)f\}du\|_0$$

$$\leq \tfrac{1}{h}\{\int_{s-h}^{s}(v(s) - v(u))du\}\|f\|_2^{\leftarrow}$$

$$+ \tfrac{1}{h}\{\int_{s-h}^{s}(w(s) - w(u))du\}\ 3\sup_{0\leq u\leq h}\|N(s-u)\|_{2,0}\|f\|_4^{\leftarrow}.$$

Die Abbildungen v und w sind isoton und daher fast überall stetig. Somit gilt die Aussage für fast alle $s \in \mathbb{R}_+$ und alle $f \in \overleftarrow{C}_4(G)$. Wir haben aber

$$\|\tfrac{1}{u+v}\{T(s-u,s+v)f - f\}\|_0 \leq \tfrac{1}{u+v}\{w(s+v) - w(s-u)\}\|f\|_2^{\leftarrow}$$

für hinreichend kleine $u,v \in \mathbb{R}_+^*$ und $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$. Da w fast überall differenzierbar ist, sind die betrachteten Operatorfamilien punktweise beschränkt auf $\overleftarrow{C}_2(G)$. Dies impliziert

die erste Behauptung.

Genügt N der Bedingung (G3'), so ist v nach 9.11 stetig und daher die Differenzierbarkeit auf ganz D gegeben. □

9.13 Bemerkung: Ein Beispiel für Generatorfamilien, welche die Bedingungen (G1), (G2) sowie (G3') erfüllen, sind die in Paragraph 8 beschriebenen einparametrigen Generatorfamilien. Dies folgt aus den Korollaren 8.11 und 8.12.

Während die Generatorfamilien in Paragraph 8 als Integratoren erscheinen, treten sie in diesem Paragraphen als Dichten auf. Tatsächlich sind die hier betrachteten Integralgleichungen ein Spezialfall derjenigen des vorherigen Paragraphen.

9.14 Korollar: Es sei $N = (N(t),D(N(t)))_{t\geq 0}$ eine Familie von Operatoren auf $C_0(G)$, die die Bedingungen (G1), (G2) sowie (G3) erfüllt. Für $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$ und $(s,t) \in D$ setzen wir $M(s,t)f := \int_s^t N(u)f\,du$.

Dann ist $M: D \to L(C_0(G),C_0(G))$ definiert und additiv. $(M(o,t))_{t\geq 0}$ genügt den Bedingungen (G1), (G2) sowie (G3'), und es gelten folgende Aussagen:

a) Es existiert genau eine Faltungshemigruppe $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ auf G, für welche

$$T_{\mu(s,t)}f - f = \int_s^t M(du)T_{\mu(s,u)}f$$

$$:= \|\cdot\|_o - \lim_{Z\in\mathfrak{Z}(s,t)} \sum_{z_j\in Z} M(z_{j-1},z_j)T_{\mu(s,z_j)}$$

für alle $(s,t)\in D$ und $f\in \overleftarrow{C}_2(G)$ gilt.

b) Es existiert genau eine Faltungshemigruppe $(\mu'(s,t))_{(s,t)\in D}$ auf G, für welche

$$T_{\mu'(s,t)}f - f = \int_s^t T_{\mu'(u,t)}M(du)f$$

im Sinn von a) für alle $(s,t)\in D$ und $f\in \overleftarrow{C}_2(G)$ gilt.

c) Es gilt $\mu'(s,t) = \mu(s,t)$ für alle $(s,t)\in D$, $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ ist von beschränkter Variation und stimmt mit der in 9.1 konstruierten Hemigruppe überein.

Beweis: α) Für alle $f\in \overleftarrow{C}_2(G)$ ist $u \to N(u)f$ nach 9.4 lokal Bochner-integrierbar. Also ist $M(s,t)f$ in $C_o(G)$ für alle $(s,t)\in D$ definiert, und zwar etwa durch

$$(*)\quad M(s,t)f = \|\cdot\|_o - \lim_{Z\in\mathfrak{Z}(s,t)} \sum_{z_j\in Z} N(z_j)f\,(z_j - z_{j-1}).$$

Für alle $t\in\mathbb{R}_+$ ist das durch $A(t)(f) := N(t)f(e)$ definierte lineare Funktional $A(t)$ fast positiv und normiert auf $\mathcal{D}(G)$. Setzen wir $B(s,t)(f) := M(s,t)f(e)$ für $(s,t)\in D$ und $f\in\mathcal{D}(G)$, so gilt $B(s,t)(f) = \int_s^t A(u)f\,du$. Also ist das lineare Funktional $B(s,t)$ fast positiv auf $\mathcal{D}(G)$. Um die Normiertheit von $B(s,t)$ zu zeigen, geht man auf eine Teilfolge des in 4.13 konstruierten Netzes $(f_K)_{K\in\mathcal{K}}$ über und benutzt den Satz von der majorisierten Konvergenz wie im Beweis von Lemma 2.7 von [19]. Schließlich überträgt sich die Invarianz bezüglich den Linksshiftoperatoren ebenfalls von den Summen in (*) auf $M(s,t)$. Daher ist $M(t) := M(o,t)$ die Einschränkung auf $\mathcal{D}(G)$

des Generators einer Faltungshalbgruppe. Bedingung (G2) ist also erfüllt.

Für alle $(s,t) \in D$ haben wir $\overleftarrow{C}_2(G) \subseteq D(M(t))$. Die durch $w(t) := \int_0^t \|N(u)\|_{2,0}^{\leftarrow} \, du$ auf $\mathbb{R}_+$ definierte Funktion w ist stetig und isoton nach 9.2 b). Für alle $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$ gilt $\|(M(t) - M(s))f\|_o \leq (w(t) - w(s)) \, \|f\|_2^{\leftarrow}$.

Zum einen sind daher $M(s,t)$ und damit auch $M(t)$ aus $\mathcal{L}((\overleftarrow{C}_2(G), \|\cdot\|_2^{\leftarrow}), C_o(G), \|\cdot\|_o))$ und (G1) erfüllt. Zum anderen zeigt diese Abschätzung auch die Gültigkeit von (G3').

β) Die nach 9.1 zu N gehörige Hemigruppe $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ löst die Integralgleichung in a). Setzt man nämlich $T(s,t) := T_{\mu(s,t)}$ für alle $(s,t) \in D$, so gilt für $(s,t) \in D$, $Z \in \mathfrak{Z}(s,t)$ und $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$ die Ungleichung

$$\|T(s,t)f - f - \int_s^t M(du)T(s,u)f\|_o$$

$$= \|\int_s^t N(u)T(s,u)f \, du - \int_s^t M(du)T(s,u)f\|_o$$

$$\leq \|\int_s^t N(u)T(s,u)f \, du - \sum_{z_j \in Z} (z_j - z_{j-1})N(z_j)T(s,z_j)f\|_o$$

$$+ \sum_{z_j \in Z} \|N(z_j)(z_j - z_{j-1}) - M(z_{j-1}, z_j)\|_{2,0}^{\leftarrow} \|f\|_2^{\leftarrow}$$

$$+ \|\sum_{z_j \in Z} M(z_{j-1}, z_j)T(s,z_j)f - \int_s^t M(du)T(s,u)f\|_o .$$

Der erste und dritte Summand konvergieren auf Grund der Definition der Integrale entlang $\mathfrak{Z}(s,t)$ gegen o.

Der zweite Summand läßt sich weiter abschätzen durch

$$\{\sum_{z_j \in Z} \int_{z_{j-1}}^{z_j} \|N(z_j) - N(u)\|_{2,0}^{\leftarrow} \, du\} \|f\|_2^{\leftarrow}.$$

Dieser Ausdruck konvergiert gegen o nach 9.4. Die Gültigkeit der Integralgleichung in b) zeigt man völlig analog.

γ) Nach β) hat man für jede weitere Evolutionsfamilie S, welche Lösung der Integralgleichung in a) ist, die Gleichung $S(s,t)f - T(s,t)f = \int_s^t T(u,t)(M(du) - M(du))S(s,u)f = 0$ für $f \in \overleftarrow{C}_2(G)$ und $(s,t) \in D$ (vgl. 9.6). Da die Operatoren S(s,t) und T(s,t) Kontraktionen sind, stimmen sie auch auf $C_o(G)$ überein. Die Eindeutigkeit der Lösung von b) wird analog gezeigt. Aussage c) folgt aus den entsprechenden Aussage 9.1 c) und d). □

An dieser Stelle bietet sich ein Vergleich mit bereits bekannten Resultaten über die Charakterisierung und Erzeugung von Faltungshemigruppen auf Lie-Gruppen an. Die zu der hier gewählten Charakterisierung notwendigen Voraussetzungen an die Evolutionsfamilie in Paragraph 8 sind weitgreifend. Sie sind hinreichend und notwendig für die Gültigkeit beider Evolutionsgleichungen als einem operatorwertigen Riemann-Stieltjes-Integral und ziehen die Existenz der zugehörigen Generatorfamilie sogar auf $\overleftarrow{C}_2(G)$ nach sich.

Ähnliches gilt für die Anforderungen an eine Generatorfamilie zur Erzeugung von Hemigruppen in diesem Paragraphen. Hier können im starken Sinn fast überall differenzierbare Hemigruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen über die Evolutionsgleichungen in Form eines $C_o(G)$-wertigen Bochner-Integrals erzeugt werden.

Im Fall von Lie-Gruppen ist die Charakterisierung und die Erzeugung von Faltungshemigruppen unter schwächeren Bedingungen gelungen. SIEBERT fordert in [19] die beschränkte

Variation der Faltungshemigruppe nur bei punktweiser Auswertung in e. Die Vorwärtsevolutionsgleichung gilt dann punktweise auf $\overleftarrow{C}_2(G)$ als Bochner-Integrale, die Rückwärtsevolutionsgleichung nur für die Auswertung bei e. Besitzt G jedoch eine relativ kompakte adjungierte Gruppe, so stimmen die Forderungen von SIEBERT mit unseren überein ([19], 8.). Für die Erzeugung von Hemigruppen wird hier nicht von Generatorfamilien, sondern von Familien erzeugender Funktionale ausgegangen. Die Zuordnung der Hemigruppe geschieht dann über die Evolutionsgleichungen in der gleichen Form, in der sie zur Charakterisierung herangezogen werden.

FEINSILVER [8] macht keine Einschränkungen an die Faltungshemigruppe. Zur Charakterisierung und Erzeugung zieht er jedoch eine Kombination von Shift-Operation und Martingal-Problem heran. Letzteres ist gleichwertig zu einer fast sicheren Gültigkeit der punktweise ausgewerteten Evolutionsgleichung.

§ 10 Störung von Faltungshemigruppen

Abschließend sollen einige Resultate über die Erzeugung von Faltungshemigruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen durch Störung der zugehörigen Generatorfamilien vorgestellt werden. Eine erste Aussage dieser Art folgt sofort aus Satz 9.1.

10.1 Korollar: Mit je zwei Operatorfamilien M und N besitzt auch $M+N := (M(t)+N(t), D(N(t)) \cap D(M(t)))_{t\geq 0}$ die Eigenschaften (G1), (G2) und (G3) von Satz 9.1 und ist damit Generatorfamilie einer (eindeutig bestimmten) Faltungshemigruppe von beschränkter Variation.

Beweis: Allein der Nachweis von (G2) bedarf einer kleinen Überlegung. Aus der Darstellung der Generatoren von Faltungshalbgruppen in 7.16 folgt aber, daß mit $\mathrm{Res}(\mathcal{D}(G), M)$ und $\mathrm{Res}(\mathcal{D}(G), N)$ auch $\mathrm{Res}(\mathcal{D}(G), M+N)$ die Einschränkung auf $\mathcal{D}(G)$ des Generators einer Faltungshalbgruppe auf G ist. □

Ein etwas allgemeineres Resultat kann unter Zuhilfenahme des einer Hemigruppe zugeordneten additiven Prozesses entwickelt werden. Es geht auf das Beispiel eines additiven Prozesses mit Werten in einer linearen Gruppe zurück, welches in [9] vorgestellt und von JANSSEN [16] genauer analysiert wurde.

Die zugrunde liegende Situation ist die Folgende. Es seien G eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis und $\mathcal{B}(G)$ ihre Borelsche σ-Algebra. Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum

$(\Omega,\mathcal{A},W)$ seien eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariabler mit Werten in $(G, \mathcal{B}(G))$ und ein additiver Prozeß $\Psi = (\Psi_t)_{t\geq 0}$ mit Werten in $(G, \mathcal{B}(G))$ gegeben. Schließlich sei $\Pi = (\Pi_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozeß mit stetig differenzierbarer Intensität v, d. h.

a) Π ist ein additiver Prozeß mit Werten in $\mathbb{Z}_+$, und

b) es existiert eine isotone, stetig differenzierbare Funktion $v\in C(\mathbb{R})$, so daß

$$W(\{\Pi_t - \Pi_s = k\}) = e^{-(v(t)-v(s))}\,\frac{(v(t)-v(s))^k}{k!}$$

für alle $k\in\mathbb{Z}_+$ und alle $(s,t)\in D$ gilt.

Die drei Familien $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, Ψ und Π seien unabhängig. Wir setzen $T_o := o$ und $T_n := \inf\{t\geq o:\ \Pi_t = n\}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Insbesondere gilt $T_{\Pi_t} \leq t \leq T_{\Pi_t+1}$ für alle $t\in\mathbb{R}_+$. Es wird nun der Prozeß $\Phi = (\Phi_t)_{t\geq 0}$ betrachtet, der durch

$$\Phi_t := \Psi_t \Psi_{T_{\Pi_t}}^{-1} \prod_{j=\Pi_t}^{1} \{U_j \Psi_{T_j} \Psi_{T_{j-1}}^{-1}\} = \Psi_t \prod_{j=\Pi_t}^{1} \{\Psi_{T_j}^{-1} U_j \Psi_{T_j}\}$$

für alle $t\in\mathbb{R}_+$ definiert ist.

In [9] wird der folgende (stationäre) Spezialfall des Prozesses Φ betrachtet. G ist die lokalkompakte Gruppe der komplexen dxd-Matrizen M mit $|\det M| = 1$ und ω das normierte Haarmaß auf der kompakten Untergruppe der unitären Matrizen in G. Die Zufallsvariablen U_n $(n\in\mathbb{N})$ sind nach ω verteilt. Π ist ein stationärer Poisson-Prozeß mit der durch $v(t) := t\alpha$ für ein $\alpha > o$ definierten Intensität v. Für eine hermitesche dxd-Matrix H mit Spur 0 ist schließlich $\Psi_t = e^{tH}$ für $t\in\mathbb{R}_+$.

Φ ist die Störung des Prozesses Ψ durch den Prozeß $(\prod_{j=1}^{\Pi_t} U_j)_{t\geq 0}$. Zur Vorbereitung dieses Resultates bestimmen

wir daher zunächst den Generator dieses zusammengesetzten Poisson-Prozesses.

10.2 Proposition: Für $t \in \mathbb{R}_+$ sei $\Theta_t := \prod_{j=1}^{\Pi_t} U_j$, wobei $\prod_{j\in\emptyset} U_j = e$ W-fast sicher gelten soll. Dann ist $\Theta = (\Theta_t)_{t\geq 0}$ ein additiver Prozeß. Zu der Hemigruppe $(\Theta_t\Theta_s^{-1}(W))_{(s,t)\in D}$ existiert genau eine Generatorfamilie $N_\Theta = (N_\Theta(t), D(N_\Theta(t)))_{t\geq 0}$, so daß die Kolmogoroffschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Es gelten $D(N_\Theta(t)) = C_o(G)$ und $N_\Theta(t)f = v'(t) \int (R_y f - f) U_1(W)(dy)$ für alle $f \in C_o(G)$ und alle $t \in \mathbb{R}_+$.
Insbesondere ist die Abbildung $t \mapsto N_\Theta(t)f$ für alle $f \in C_o(G)$ Riemann-integrierbar, so daß N_Θ und $(\Theta_t\Theta_s^{-1}(W))_{(s,t)\in D}$ die Evolutionsgleichungen erfüllen.

Beweis: Die Additivität von Θ folgt direkt aus derjenigen von Π sowie der Unabhängigkeit von Π und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Durch Nachrechnen verifiziert man für $s \geq o$ und $f \in C_o(G)$ die Gleichungen

$$N_\Theta(s)f := \|\cdot\|_o\text{-}\lim_{h\downarrow o} \frac{1}{h} \{ \int (R_y f - f)\ \Theta_{s+h}\Theta_s^{-1}(W)(dy) \}$$

$$= \int \{(R_y f - f)v'(s)\} U_1(W)(dy)$$

und

$$\|\cdot\|_o\text{-}\lim_{h\downarrow o} \frac{1}{-h} \{ \int (R_y f - f)\ \Theta_s\Theta_{s-h}^{-1}(W)(dy) \} = - N_\Theta(s)f.$$

Die Grenzwerte der Differenzenquotienten sind eindeutig bestimmt. Die letzte Aussage folgt aus der Integration dieser Gleichungen. □

Entscheidend für das weitere Vorgehen ist die Aussage des folgenden Lemmas. Der durch den in 10.2 vorgestellten Prozeß Θ gestörte Prozeß ist wieder ein additiver Prozeß und definiert als solcher wieder eine Hemigruppe.

10.3 Lemma: Φ ist ein additiver Prozeß.

Beweis: α) Nach [1], 67.4 ist Ψ ein meßbarer Prozeß. Daher ist Ψ_{T_n} meßbar. Also ist Φ ein stochastischer Prozeß. Π und Ψ sind additiv, daraus folgt sofort $\Phi_0 = e$ W-fast sicher. Für alle $U \in \mathcal{U}(G)$ und $(s,t) \in D$ gilt

$$W([\Phi_t \Phi_s^{-1} \notin U])$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} W([\Pi_t - \Pi_s = k, \Phi_t \Phi_s^{-1} \notin U])$$
$$\leq W([\Pi_s = \Pi_t])\, W([\Psi_t \Psi_s^{-1} \notin U]) + W([\Pi_s \neq \Pi_t]).$$

Also ist Φ stochastisch stetig.

β) Es ist nun zu zeigen, daß Φ unabhängige (Rechts-)Zuwächse besitzt, daß also $\Phi_s \Phi_r^{-1}$ und $\Phi_t \Phi_s^{-1}$ unabhängig sind für alle $(r,s),(s,t) \in D$. Dazu bezeichne $G^{\mathbb{N}}$ bzw. $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ das schwache direkte Produkt von G bzw. $\mathbb{R}_+$ versehen mit der Spur-σ-Algebra $\mathcal{J}^{\mathbb{N}}$ von $\mathcal{B}(G)^{\mathbb{N}}$ bzw. $\mathcal{B}_+^{\mathbb{N}}$ von $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Für $x = (x_1,..,x_k,e,..)$ aus $G^{\mathbb{N}}$ wird $x = (x_1,...,x_k)$ geschrieben.

γ) Für alle $(s,t) \in D$ sei $\phi(s,t)\colon (\Omega,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_+^{\mathbb{N}})$ definiert durch

$$\phi(s,t)(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \Pi_t(\omega) = \Pi_s(\omega) \text{ gilt und} \\ (s, T_{\Pi_s(\omega)+1}(\omega), \ldots, T_{\Pi_t(\omega)}(\omega), t) & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Da G polnisch ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß Π rechtsseitig stetige Pfade besitzt (vgl. 6.3).

Dann läßt sich die Meßbarkeit der Abbildung $\omega \mapsto T_{\Pi_s(\omega)+k}$ für $k \in \mathbb{Z}_+$ und $s \in \mathbb{R}_+$ elementar nachprüfen. Somit ist auch $\phi(s,t)$ für alle $(s,t) \in D$ meßbar.

Für den Nachweis der Unabhängigkeit von $\phi(r,s)$ und $\phi(s,t)$ für alle $(r,s),(s,t) \in D$ reicht es, die Gültigkeit von

$$W([\phi(r,s) \in A,\ \phi(s,t) \in A']) = W([\phi(r,s) \in A])\ W([\phi(s,t) \in A'])$$

für alle endlich dimensionalen Intervalle

$A = [u_1,v_1] \times \ldots \times [u_n,v_n] \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ zu zeigen. Für $n = 3$ gilt

$$W([\phi(r,s) \in [u_1,v_1] \times [u_2,v_2] \times [u_3,v_3], \phi(s,t) \in [u_1',v_1'] \times [u_2',v_2'] \times [u_3',v_3']])$$

$$= W([\Pi_{v_2 \wedge s} - \Pi_{u_2 \vee r} = 1,\ \Pi_{v_2' \wedge t} - \Pi_{u_2' \vee s} = 1,$$
$$r \in [u_1,v_1], s \in [u_3,v_3] \cap [u_1',v_1'],\ t \in [u_3',v_3']])$$

$$= W([\phi(r,s) \in [u_1,v_1] \times [u_2,v_2] \times [u_3,v_3]])$$
$$W([\phi(s,t) \in [u_1',v_1'] \times [u_2',v_2'] \times [u_3',v_3']]).$$

Der allgemeine Fall folgt mit Hilfe vollständiger Induktion.

δ) Für $(s,t) \in D$ sei $\pi(s,t)\colon (\Omega,\mathfrak{A}) \to (G^{\mathbb{N}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{N}})$ definiert durch

$$\pi(s,t)(\omega) := \begin{cases} e & \text{falls } \Pi_t(\omega) = \Pi_s(\omega) \text{ gilt, und} \\ (U_{\Pi_s(\omega)+1}(\omega), \ldots, U_{\Pi_t(\omega)}(\omega), e, \ldots) & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Die Abbildung $\omega \mapsto \pi(s,t)(\omega)$ ist offensichtlich meßbar. Für die Unabhängigkeit der Zuwächse ist wiederum

$$W([\pi(r,s) \in A, \pi(s,t) \in A']) = W([\pi(r,s) \in A])\ W([\pi(s,t) \in A'])$$

für alle $A,\ A' \in \mathfrak{g}^{\mathbb{N}}$ und $(r,s),(s,t) \in D$ zu zeigen. Dies folgt jedoch aus der Tatsache, daß die U_n $(n \in \mathbb{N})$ identisch verteilt sind und $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\Pi_t)_{t \geq 0}$ unabhängig sind.

ε) Für alle $(s,t) \in D$ sei $\psi(s,t)$ die durch

$$\psi(s,t)(\omega) := \{e\}^{[0,s[} \times (\Psi_t(\omega)\Psi_r^{-1}(\omega))_{r \in [s,t]} \times \{e\}^{]t,\infty[}$$

definierte Abbildung von $(\Omega,\mathfrak{A})$ in die Menge $\mathfrak{M}(\mathbb{R}_+,G)$ der meßbaren Abbildungen von $\mathbb{R}_+$ nach G, versehen mit der Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{B}(G)^{\mathbb{R}}$. Damit ist also $\psi(s,t)$ die Einschränkung auf $[s,t]$ der Pfade von $r \mapsto \Psi_t\Psi_r^{-1}$. Nach der Wahl der σ-Algebra $\mathfrak{B}(G)^{\mathbb{R}}$ ist $\psi(s,t)$ meßbar. Auf Grund der Unabhängigkeit der Zuwächse von $(\Psi_t)_{t\geq 0}$ sind aber die Zufallsvariablen $\psi(r,s)$ und $\psi(s,t)$ für alle $(r,s),(s,t)\in D$ unabhängig.

ζ) Nun ist $\Phi_t\Phi_s^{-1}$ eine meßbare Funktion des Tripels $(\phi(s,t),\pi(s,t),\psi(s,t))$. Die Abbildungen

$$M_1:\begin{cases} G^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \times \mathfrak{M}(\mathbb{R}_+,G) \to G^{\mathbb{N}} \times G^{\mathbb{N}} \\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (t_n)_{n\in\mathbb{N}},\ f) \mapsto ((x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}) \end{cases}$$

und

$$M_2:\begin{cases} G^{\mathbb{N}} \times G^{\mathbb{N}} \to G \\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto (y_1y_2^{-1}x_1y_2y_2^{-1}x_2y_3\cdots)^{-1} \end{cases}$$

sind nämlich meßbar. Es gilt

$$\Phi_t\Phi_s^{-1} = \Psi_t \Big\{ \prod_{j=\Pi_t}^{\Pi_s+1} \Psi_{T_j}^{-1}\, U_j\, \Psi_{T_j} \Big\} \Psi_s^{-1}$$

und für alle $\omega\in\Omega$ daher

$$\Phi_t\Phi_s^{-1}(\omega) = M_2(M_1(\pi(s,t)(\omega),\phi(s,t)(\omega),\psi(s,t)(\omega)).$$

Also besitzt Φ unabhängige Zuwächse. □

Wir wenden uns nun der Betrachtung der Generatorfamilie des gestörten Prozesses Φ zu. Die Zuordnung geschieht hier über die Kolmogoroffschen Differentialgleichungen.

10.4 Lemma: Erfüllen $N = (N(t), D(N(t)))_{t\geq o}$ und $(\Psi_t \Psi_s^{-1}(W))_{(s,t)\in D}$ die Kolmogoroffschen Differentialgleichungen, so auch $M = (M(t), D(N(t)))_{t\geq o}$ und $(\Phi_t \Phi_s^{-1}(W))_{(s,t)\in D}$, wobei M definiert ist durch

$$M(t)f = N(t)f + v'(t) \int (R_y f - f)\, U_1(W)(dy)$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und $f \in D(N(t))$.

Beweis: Es reicht, die Komlogoroffschen Differentialgleichungen für $(\Phi_t \Phi_s^{-1})_{(s,t)\in D}$ und M auf der Diagonalen $\{(s,s): s \in \mathbb{R}_+\}$ von D zu zeigen ([13], 4.6.14). Mit den Bezeichungen von 10.2 hat man für die Vorwärtsdifferentialgleichung die folgende Abschätzung ($s \in \mathbb{R}_+$, $f \in D(N(s))$.

$$\sup_{x\in G} \left|\frac{1}{h} \int \{f(x\Phi_{s+h}\Phi_s^{-1}) - f(x)\}dW\right|$$

$$\leq \sup_{x\in G} \left|\frac{1}{h} \int \{f(x\Phi_{s+h}\Phi_s^{-1}) - f(x\Theta_{s+h}\Theta_s^{-1})\}dW\right|$$

$$+ \sup_{x\in G} \left|\frac{1}{h} \int \{f(x\Theta_{s+h}\Theta_s^{-1}) - f(x)\}dW\right|.$$

Geht h gegen o, so konvergiert der zweite Summand gegen $N_\Theta f(x)$ nach 10.2. Die Konvergenz ist gleichmäßig in x auf Grund der Vertauschbarkeit von Wahrscheinlichkeitsoperatoren und Linksshiftoperatoren.

Durch Zerlegung des Integrals im ersten Summanden in eines über $[\Pi_{s+h} - \Pi_s = o]$ und ein solches über das Komplement dieser Menge erhält man

$$\sup_{x\in G} \left|\frac{1}{h} \int \{f(x\Phi_{s+h}\Phi_s^{-1}) - f(x\Theta_{s+h}\Theta_s^{-1})\}dW\right|$$

$$\leq W([\Pi_{s+h} - \Pi_s = o]) \sup_{x\in G} \left|\frac{1}{h} \int \{f(x\Psi_{s+h}\Psi_s^{-1}) - f(x)\}dW\right|$$

$$+ \sup_{x\in G} \left|\frac{1}{h} \{W([\Pi_{s+h} - \Pi_s > o]) \int \{f(x\Phi_{s+h}\Phi_s^{-1}) - f(x\Theta_{s+h}\Theta_s^{-1})\}dW\right|.$$

Dabei wird die Unabhängigkeit von Π und Ψ benutzt. Geht h gegen o, so konvergiert der erste Summand des letzten

Ausdrucks gegen $N(s)f(x)$ gleichmäßig in x. Es gilt

$$\lim_{h\downarrow o} \frac{1}{h} W([\Pi_{s+h}-\Pi_s > o]) = \lim_{h\downarrow o} \frac{1}{h}\{1 - W([\Pi_{s+h}-\Pi_s = o])\} = v'(s).$$

Auf Grund der stochastischen Stetigkeit von Φ und Θ sowie der gleichmäßigen Stetigkeit von f konvergiert daher auch der letzte Summand gleichmäßig in x gegen o. □

Aus diesem Lemma folgt nun die angekündigte Aussage über die Störung der Generatorfamilie einer Hemigruppe durch einen zusammengesetzten Poisson-Prozeß im Sinn von 10.2.

10.5 Korollar: Es sei G eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis. $N = (N(t),D(N(t)))_{t\geq o}$ sei die Generatorfamilie einer Hemigruppe $(\mu(s,t))_{(s,t)\in D}$ auf G in dem Sinn, daß die Kolmogoroffschen Differentialgleichungen für alle $(s,t)\in D$ erfüllt sind.
Für jedes beschränkte Maß ν auf G und jede stetig differenzierbare Funktion $v: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$M(t)f := N(t)f + v'(t) \int (R_y f - f)\, \nu(dy)$$

für alle $t\in\mathbb{R}_+$ und $f\in D(N(t))$. Dann gelten folgende Aussagen.

a) $M = (M(t),D(N(t)))_{t\geq o}$ ist Generatorfamilie einer Hemigruppe $(\nu(s,t))_{(s,t)\in D}$ in dem Sinn, daß die Kolmogoroffschen Differentialgleichungen erfüllt sind.

b) Ist die Abbildung $u \mapsto N(u)f$ von $\mathbb{R}_+$ in $C_o(G)$ für alle $f\in D(N) := \bigcap_{u\geq o} D(N(u))$ (stark meßbar und) integrierbar, so gilt dies auch für die Abbildung

$u \mapsto M(u)f$. In diesem Fall erfüllen M wie auch N die Evolutionsgleichungen auf D(N).

c) Erfüllt N die Voraussetzungen (G1), (G2) sowie (G3) von 9.1 und ist die Ableitung ν' der Intensität ν von beschränkter Variation, so genügt auch M den Bedingungen (G1), (G2) und (G3). In diesem Fall ist $(\nu(s,t))_{(s,t)\in D}$ von beschränkter Variation und es gelten die Evolutionsgleichungen in der Gestalt von 9.1 bzw. 9.14. Die Aussage bleibt gültig, wenn (G3) durch (G3') ersetzt wird.

Beweis: Da G ein polnischer Raum ist, existiert ein additiver Prozeß $\Psi = (\Psi_t)_{t\geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathfrak{A},W)$ mit Werten in G, so daß $\mu(s,t) = (\Psi_t\Psi_s^{-1})(W)$ für alle $(s,t)\in D$ gilt. Ohne Einschränkung sei ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Ferner sei $(\Omega,\mathfrak{A},W)$ so gewählt, daß $\nu = U_n(W)$ für eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger Zufallsvariabler auf $(\Omega,\mathfrak{A},W)$ gilt, welche ihrerseits von Ψ unabhängig ist. In dieser Situation ist aber der Prozeß Φ ein additiver Prozeß nach 10.3. Nach 6.5 ist die Familie $(\Phi_t\Phi_s^{-1}(W))_{(s,t)\in D}$ eine Faltungshemigruppe auf G. Ihre Generatorfamilie ist die Familie M nach 10.4. Damit ist Aussage a) gezeigt.

Unter den angegebenen Bedingungen führt die Integration der Kolmogoroffschen Differentialgleichungen zu den Evolutionsgleichungen. Dies impliziert Aussage b).

Auf Grund der Stetigkeit von $N_\Theta(t)$ $(t\in\mathbb{R}_+)$ erfüllt mit N auch M die Bedingung (G1). M genügt der Bedingung (G2) von 9.1 nach Aussage a). Genügt N der Bedingung (G3) bezüglich einer Funktion $w:D\to\mathbb{R}$, so setzen wir

$$u(t) := w(t) + 2\nu(G) \sup_{Z \in \mathfrak{Z}(o,t)} \sum_{z_j \in Z} |v'(z_j) - v'(z_{j-1})|,$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Die Funktion $u:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist isoton. Für alle $f \in \overset{\leftarrow}{C}_2(G)$ und alle $(s,t) \in D$ gilt

$$\begin{aligned}
&\|M(t)f - M(s)f\|_o \\
&\leq \|N(t)f - N(s)f\|_o + \|(v'(t) - v'(s)) \int (R_y f - f)\, \nu(dy)\|_o \\
&\leq \{w(t) - w(s) + 2\nu(G)|v'(t) - v'(s)|\}\, \|f\|_2^{\leftarrow} \\
&\leq (u(t) - u(s))\, \|f\|_2^{\leftarrow}.
\end{aligned}$$

Also erfüllt M auch (G3). Auf Grund der Stetigkeit von v' ist mit w auch u stetig. Somit gilt Aussage c) auch bezüglich der Bedingung (G3'). □

Literatur

[1] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. Walter de Gruyter, Berlin - New York, 3. Aufl., 1978

[2] Boseck, R., Czichowski, G.: Grundfunktionen und verallgemeinerte Funktionen auf topologischen Gruppen. Math. Nachr. 58 (1973), 215 - 240

[3] Boseck, H., Czichowski, G., Rudolph, K.: Analysis on Topological Groups - General Lie-Theory. Teubner Verlag, Leipzig, 1981

[4] Bruhat, F.: Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques. Bull. Soc. Math. France 89 (1961), 43 - 75

[5] Davies, E. B.: One-Parameter Semigroups. Academic Press, London - New York - Toronto, 1980

[6] Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear Operators I. Interscience Publishers, New York, 1958

[7] Edamatsu, T.: Spaces of differentiable functions on compact groups. J. Math. Kyoto Univ. 24-2 (1984), 323 - 360

[8] Feinsilver, P.: Processes with independent increments on a Lie group. Trans. Amer. Math. Soc. 242 (1978), 73 - 121

[9] Hantsch, L., v. Waldenfels, W.: A random walk on the general linear group related to a problem in atomic physics. In:
Probability Measures on Groups, Proceedings, Oberwolfach 1978, Lecture Notes in Math. 595, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1979, 131 - 143

[10] Helgason, S.: Differential Geometrie and Symmetric Spaces. Academic Press, New York - London, 1962

[11] Herod, J. U., McKelvey, R. W.: A Hille-Yosida theory for evolutions. Israel J. Math. 36 (1980), 13 - 40

[12] Hewitt, E., Ross, K. A.: Abstract Harmonic Analysis I. Springer, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 2nd ed. 1979

[13] Heyer, H.: Probability Measures on Locally Compact Groups. Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1977

[14] Heyer, H.: Stetige Hemigruppen von Wahrscheinlichkeitsmassen und additive Prozesse auf einer lokalkompakten Gruppe. Nieuw Arch. Wiskunde 27 (1979), 287 - 340

[15] Hunt, G. A.: Semi-groups of measures on Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 264 - 293

[16] Janssen, A.: Unveröffentlichtes Manuskript. 1984

[17] Lashof, R.: Lie algebras of locally compact groups. Pac. J. Math. 7 (1957), 1145 - 1162

[18] Montgomery, D., Zippin, L.: Topological Transformation Groups. Reprint Robert E. Krieger Publ. Comp., Huntington - New York, 1974

[19] Siebert, E.: Continuous hemigroups of probability measures on a Lie group. In: Probability Measures on Groups, Proceedings, Oberwolfach 1981, Lecture Notes in Math. 928, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1982, 362 - 402

[20] Yosida, K.: Functional Analysis. Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 6th ed. 1980

Lebenslauf

Ich kam am 30. Mai 1955 in Celle als zweites Kind des Richters Dr. Manfred Born und seiner Frau Annaliese geborene Schimmel zur Welt. Ich habe zwei Brüder.

Nach dem Umzug meiner Eltern nach Lüneburg wurde ich 1962 in die dortige Volksschule eingeschult. 1965 zogen wir nach Celle zurück. 1966 wechselte ich auf das Gymnasium Ernestinum. Am neusprachlichen Zweig des Gymnasiums legte ich 1974 das Abitur ab. Nach dem Dienst in der Bundeswehr begann ich im Sommersemester 1976 das Studium der Medizin an der Universität Tübingen. Drei Semester später nahm ich zusätzlich das Studium der Mathematik auf. Nach Ablegen der ärztlichen Vorprüfung 1978, des ersten Abschnittes der ärztlichen Prüfung 1979 und der Diplomvorprüfung im selben Jahr entschloß ich mich, nur noch das Mathematik-Studium fortzusetzen. Im Sommer 1983 legte ich die Diplomprüfung in Mathematik ab.

Meine Dissertation mit dem Titel "Differenzierbare Funktionen und Faltungshemigruppen auf einer lokalkompakten Gruppe" fertigte ich zwischen Oktober 1983 und Oktober 1986 unter Anleitung von Prof. Dr. E. Siebert an.

Zwischen 1980 und 1985 arbeitete ich als wissenschaftliche Hilfskraft am mathematischen Institut. Seit Juli 1986 bin ich wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für medizinische Biometrie. Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren K. Dietz, H. Heyer, R. Nagel, E. Siebert, H. H. Schaefer und U. Schlotterbeck.